

Mateusz ŚLIWKA<sup>1</sup>, Kacper CIEŚLAR<sup>2</sup>

Opiekun naukowy: Józef DREWNIAK<sup>3</sup>

## STANOWISKO DO WYZNACZANIA SZTYWNOŚCI POLIMEROWYCH KÓŁ ZĘBATYCH

**Streszczenie:** W ramach niniejszej pracy przedstawiono projekt oraz wykonanie stanowiska do wyznaczania sztywności zazębienia polimerowych kół walcowych o zębach prostych. Wykonany został model 3D oraz dokumentacja konstrukcyjna 2D stanowiska. W pracy opisana została metodyka wyznaczania sztywności zazębienia na linii przyporu kół walcowych o zębach prostych.

**Słowa kluczowe:** linia przyporu, sztywność zazębienia, koła walcowe

## STAND FOR DETERMINING THE STIFFNESS OF POLYMER GEAR WHEEL

**Summary:** This work presents the design and construction of the stand for determining the meshing stiffness of polymer cylindrical gears with straight teeth. A 3D model and 2D construction documentation of the station were made. The paper describes the methodology of determining the mesh stiffness on the pressure line of cylindrical gears with straight teeth.

**Keywords:** pressure line, meshing stiffness, gear wheel

### 1. Wprowadzenie

Przekładnie zębate są istotnym źródłem drgań, co wynika z okresowo zmiennej liczby zębów występujących w przyporze. To z kolei przekłada się na powstawanie dodatkowych sił dynamicznych - drgań parametrycznych. Sztywność zazębienia jest zatem istotnym parametrem wpływającym na dynamikę przekładni zębatej [4, 5, 6]. W procesie projektowania przekładni zębatych ważne jest określenie wpływu

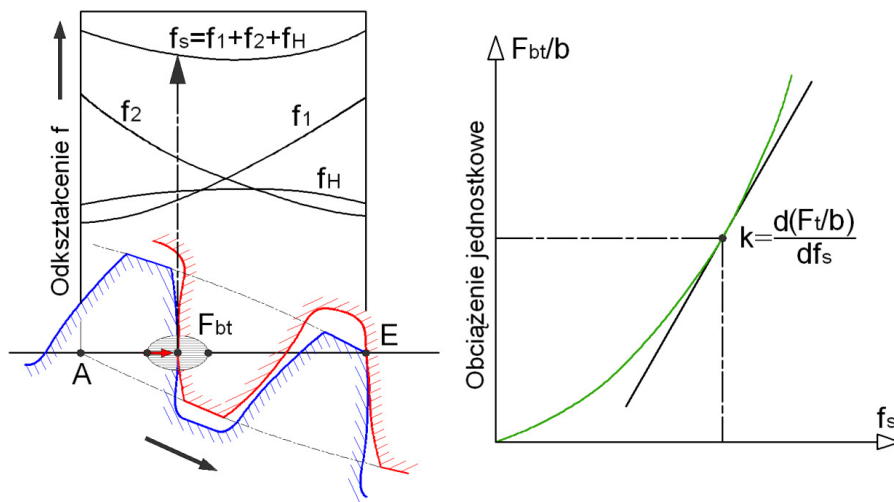
---

<sup>1</sup> mgr inż., Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Katedra Podstaw Budowy Maszyn, email: msliwka@ath.bielsko.pl

<sup>2</sup> mgr inż., Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Katedra Silników Spalinowych i Pojazdów, email: kcieslar@ath.bielsko.pl

<sup>3</sup> dr hab. inż., prof. ATH, Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Katedra Podstaw Budowy Maszyn, email: jdrewniak@ath.bielsko.pl

geometrii uzębienia (np. współczynników przesunięcia zarysów odniesienia) oraz klasy dokładności wykonania kół zębatych na przebieg sztywności zazębienia a tym samym na powstające nadwyżki dynamiczne [7]. Sztywność jednej pary zębów (oznaczana symbolem  $k$ ) będących w przyporze określana jest stosunkiem siły normalnej do zarysu zęba w przekroju czołowym  $F_{bt}$  wyrażonej w  $N$  do przyrostu przemieszczenia w  $\mu m$  tej samej pary zębów o jednostkowej szerokość koła równej  $1 mm$  (rysunek 1) [5].



Rysunek 1. Definicja sztywności zazębienia [5]

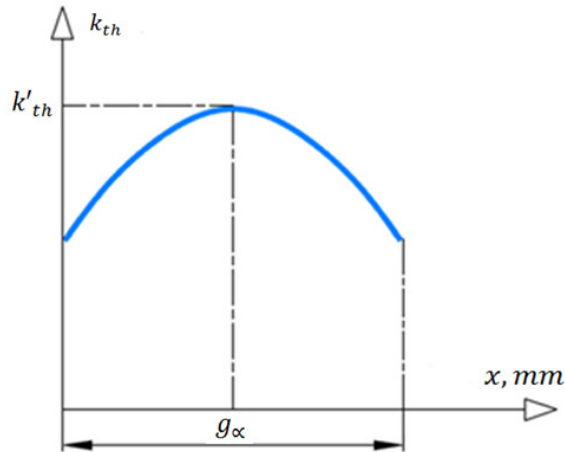
Symbole na Rysunku 1 oznaczają odpowiednio:

- $f_1$  – odkształcenie zęba i korpusu zębnika,
- $f_2$  – odkształcenie zęba i korpusu koła,
- $f_H$  – spłaszczenie boków zęba wynikające z naprężeń Hertza.

Sztywność zazębienia zależna jest od wielu czynników, przede wszystkim od kształtu i materiału współpracujących zębów jak również od:

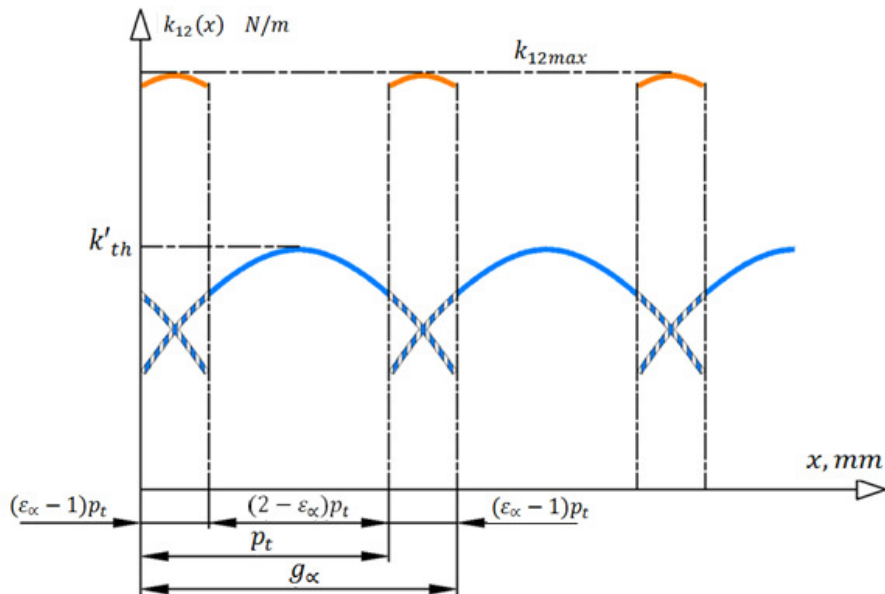
- geometrii uzębienia: liczby zębów, zarysu odniesienia, kąta pochylenia linii zęba,
- czołowego wskaźnika zazębienia  $\varepsilon_\alpha$ ,
- długości podziałki czołowej  $p_t$  i odcinka przyporu  $g_\alpha$ ,
- wartości obciążenia,
- sztywności połączenia wału z piastą,
- chropowatości i falistości boków zęba.

Sztywność jednej pary zębów  $k_{th}$  zmienia się wzdłuż odcinka przyporu  $g_\alpha$  co wynika ze zmiany położenia punktu styku zębów (rysunek 2). Maksymalna wartość sztywności  $k'_{th}$  występuje na środku odcinka przyporu  $g_\alpha$  gdzie punkt przyporu zachodzi dla maksymalnej sumarycznej grubości zębów.



Rysunek 2. Przebieg sztywności jednej pary zębów

W przekładni walcowej o zazębieniu normalnym ( $1 < \varepsilon_{\alpha} < 2$ ) współpraca kół charakteryzuje się występowaniem jedno i dwuparowego zazębienia na odcinku przyporu [5]. Pod wpływem stałego obciążenia zewnętrznego obciążenie i odkształcenie kolejnych par zębów będącej w przyporze ulega cyklicznym zmianom. Zjawisko to wpływa na zmienną sztywności zazębienia, którą można rozumieć jako wypadkową równoległego połączenia zmiennych sztywności  $k_{th}$  pojedynczych par zębów, co zostało przedstawione na rysunku 3 [5].



Rysunek 3. Zasada sumowania sztywności kolejnych par zębów [5]

## 2. Geometria kół próbek

Geometria oraz obliczenia kół próbek do badań sztywności ząbkowania współpracujących kół zębatych o zębach prostych przedstawione i obliczone zostały w tym rozdziale w oparciu o publikacje [3,5,9]. W tabeli 1 zostały zestawione dobrane parametry współpracujących kół walcowych.

Tabela 1. Dobre parametry kół próbek

| Parametr     | Oznaczenie | Wartość |
|--------------|------------|---------|
| Moduł        | $m$        | 5       |
| Zęby zębnika | $z_1$      | 19      |
| Zęby koła    | $z_2$      | 31      |

Średnica podziałowa zębnika 1 i koła 2:

$$d_1 = z_1 \cdot m = 19 \cdot 5 = 95 \text{ mm} \quad (1)$$

$$d_2 = z_2 \cdot m = 31 \cdot 5 = 155 \text{ mm} \quad (2)$$

Średnica zasadnicza zębnika 1 i koła 2:

$$d_{b1} = z_1 \cdot m \cdot \cos\alpha_p = 19 \cdot 5 \cdot \cos 20^\circ = 89,271 \text{ mm} \quad (3)$$

$$d_{b2} = z_2 \cdot m \cdot \cos\alpha_p = 31 \cdot 5 \cdot \cos 20^\circ = 145,652 \text{ mm} \quad (4)$$

gdzie:

$$\cos\alpha_p = 20^\circ$$

Przełożenie geometryczne:

$$u = \frac{z_2}{z_1} = \frac{31}{19} = 1,632 \quad (5)$$

Odległość osi kół:

$$u = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{95 + 155}{2} = 125 \text{ mm} \quad (6)$$

Średnica okręgów toczących zębnika 1 i koła 2:

$$d_{w1} = \frac{2 \cdot a}{1 + u} = \frac{2 \cdot 125}{1 + 1,632} = 94,985 \text{ mm} \quad (7)$$

$$d_{w2} = \frac{2 \cdot a \cdot u}{1 + u} = \frac{2 \cdot 125 \cdot 1,632}{1 + 1,632} = 155,015 \text{ mm} \quad (8)$$

Średnica podstaw zębnika 1 i koła 2:

$$d_{f1} = d_1 - 2 \cdot m \cdot c_p^* = 95 - 2 \cdot 5 \cdot 0,25 = 82,5 \text{ mm} \quad (9)$$

$$d_{f2} = d_2 - 2 \cdot m \cdot c_p^* = 155 - 2 \cdot 5 \cdot 0,25 = 142,5 \text{ mm} \quad (10)$$

gdzie:

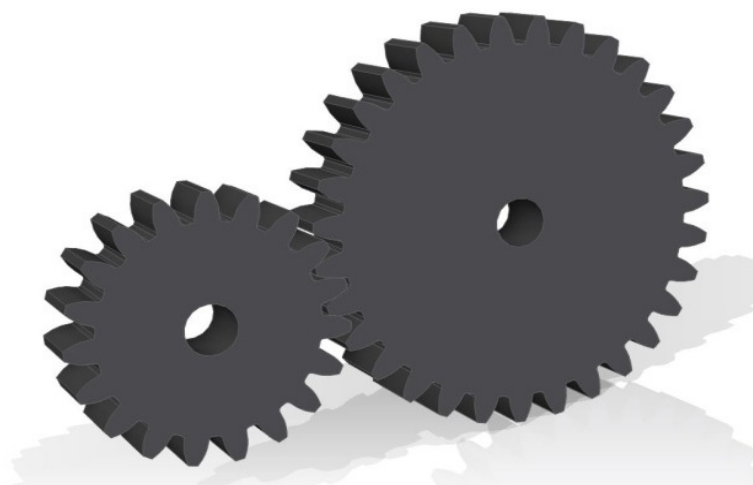
$c_p^* = 0,25$  - współczynnik luzu wierzchołkowego [15]

Średnica wierzchołków zębnika 1 i koła 2:

$$d_{a1} = d_1 + 2 \cdot m = 95 + 2 \cdot 5 = 105 \text{ mm} \quad (11)$$

$$d_{a2} = d_2 + 2 \cdot m = 155 + 2 \cdot 5 = 165 \text{ mm} \quad (12)$$

W oparciu o dobrane parametry i obliczone wielkości geometryczne kół próbek przy wsparciu generatora kół zębanych programu Solid Edge [13] przygotowane zostały modele 3D kół próbek (Rysunek 4).



Rysunek 4. Model kół zębanych

Do wykonania kół próbek wykorzystany został Poliamid PA6+MoS2. Dodanie dwusiarczku molibdenu (MoS2) do poliamidów nadaje im czarny kolor. Dodatek MoS2 w PA6 zwiększa sztywność i odporność na ścieranie, podwyższa stabilność wymiarowo – kształtową wykonanych części oraz zwiększa odporność na warunki atmosferyczne [10,19]. Własności PA6 + MOS2 [18,19]:

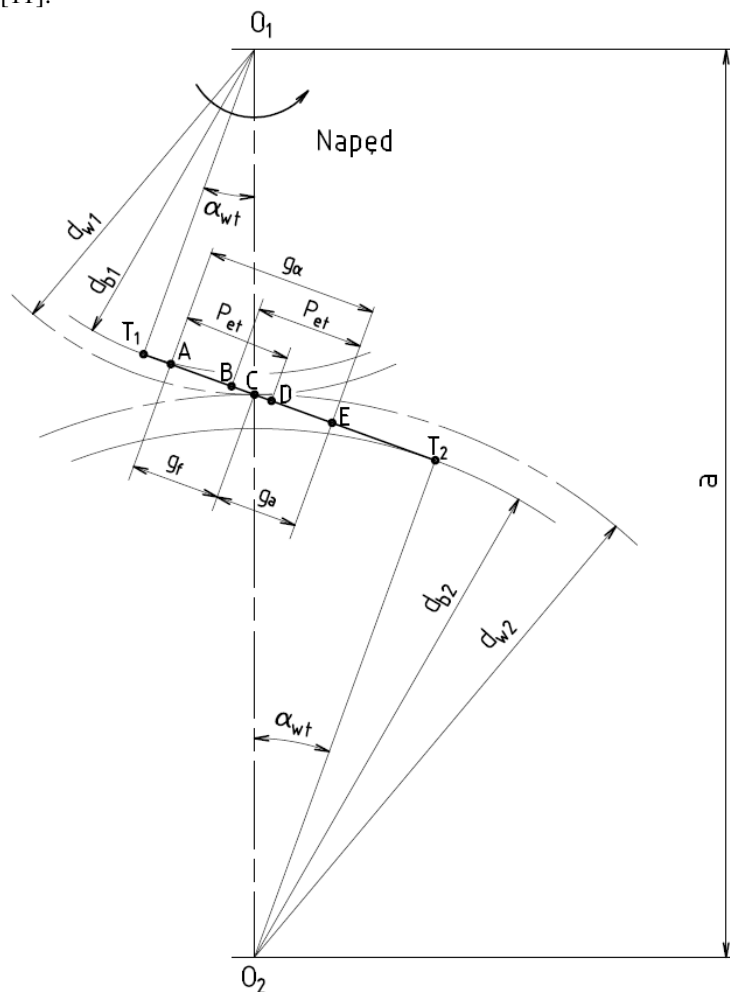
- długotrwała temperatura pracy 100°C,
- krótkotrwała temperatura pracy 160°C,
- temperatura topnienia 220°C,
- moduł Younga 3200 MPa,
- wytrzymałość na rozciąganie 82 MPa,
- łatwość obróbki skrawaniem,
- odporność na większość olei i paliw.

Wymienione własności poliamidu PA6 z dodatkiem MOS2 wpływają na szerokie stosowanie tego polimeru w przemyśle [14,19], a w szczególności w:

- konstrukcji maszyn,
- produkcji części precyzyjnych,
- motoryzacji.

Korzystne własności mechaniczne i fizyczne wpłynęły na wybór tego polimeru do wykonania kół próbek.

Sztywność zazębienia wyznacza się na linii przyporu w charakterystycznych jej punktach A, B, C, D, E. Rysunek zazębienia i linia przyporu badanych kół próbek o zazębieniu zewnętrznym przedstawione zostały na rysunku 5. Rysunek przygotowany został w programie AutoCAD w oparciu o dane geometryczne kół próbek [11].



Rysunek 5. Odcinek przyporu[5]

Charakterystyczne punkty na linii przyporu [5]:

- A – punkt początkowy przyporu – punkt przecięcia linii przyporu z okręgiem czynnym wierzchołków koła napędzanego,
- B – wewnętrzny punkt jednoparowego przyporu koła napędzającego, zewnętrzny punkt jednoparowego przyporu koła napędzanego,
- C – biegun zazębienia,
- D – zewnętrzny punkt jednoparowego przyporu koła napędzającego, wewnętrzny punkt jednoparowego przyporu koła napędzanego,

- E – punkt końcowy przyporu – punkt przecięcia linii przyporu z okręgiem czynnym wierzchołków koła napędzającego,
  - T<sub>1</sub> – punkt styczności linii przyporu z okręgiem zasadniczym koła 1 (d<sub>b1</sub>),
  - T<sub>2</sub> – punkt styczności linii przyporu z okręgiem zasadniczym koła 1 (d<sub>b2</sub>).
- Odległość między punktami A i E jest długością odcinka czynnego przyporu  $g_\alpha$  dwóch współpracujących kół walcowych:

$$g_\alpha = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{d_{Na1}^2 - d_{b1}^2} + \frac{z_2}{|z_2|} \sqrt{d_{Na2}^2 - d_{b2}^2} - 2a \sin \alpha_{wt} \right] \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{105^2 - 89,271^2} + \frac{31}{|31|} \sqrt{165^2 - 145,652^2} - 2 \cdot 125 \cdot \sin 20^\circ \right] =$$

$$= 23,650 \text{ mm}$$

Część odcinka przyporu AC odpowiadającego zazębieniu stopy zęba koła 1 i głowy zęba koła 2 jest długością wżębienia  $g_f$ :

$$g_f = \frac{1}{2} \left[ \frac{z_2}{|z_2|} \sqrt{d_{Na2}^2 - d_{b2}^2} - d_{b2} \operatorname{tg} \alpha_{wt} \right] \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{31}{|31|} \sqrt{165^2 - 145,652^2} - 145,652 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ \right] = 12,257 \text{ mm}$$

Natomiast druga część odcinka przyporu CE odpowiadająca zazębieniu głowy zęba koła 1 i stopy zęba koła 2 jest długością wyzębienia  $g_a$ :

$$g_a = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{d_{Na1}^2 - d_{b1}^2} - d_{b1} \operatorname{tg} \alpha_{wt} \right] \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{105^2 - 89,271^2} - 89,271 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ \right] = 11,393 \text{ mm}$$

Podziałka na walcu zasadniczym:

$$p_{bt} = \frac{\pi \cdot d_{b1(2)}}{z_{1(2)}} = \frac{\pi \cdot 89,271}{19} = 14,761 \text{ mm} \quad (16)$$

Podziałka przyporu czołowa:

$$p_{et} = p_{bt} = 14,761 \text{ mm} \quad (17)$$

Stąd wskaźnik zazębienia  $\varepsilon_\alpha$  wynosi:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{g_\alpha}{p_{et}} = \frac{23,650}{14,761} = 1,602 \quad (18)$$

Z trójkątów prostokątnych  $O_1CT_1$  i  $O_2CT_2$  wynika:

$$T_1T_2 = a \sin \alpha_{wt} = 125 \cdot \sin 20^\circ = 42,753 \text{ mm} \quad (19)$$

Długość odcinka AT<sub>1</sub> wynosi:

$$AT_1 = \frac{1}{2} \frac{z_2}{|z_2|} \sqrt{r_{Na2}^2 - r_{b2}^2} = \frac{1}{2} \frac{31}{|31|} \sqrt{82,5^2 - 72,826^2} = 3,989 \text{ mm} \quad (20)$$

W tabeli 2 przedstawione zostały współrzędne charakterystycznych punktów przyporu w odniesieniu do punktu T<sub>1</sub>. Współrzędne obliczone na podstawie rysunku 5 i wzorów nr 13-15,17,19-20.

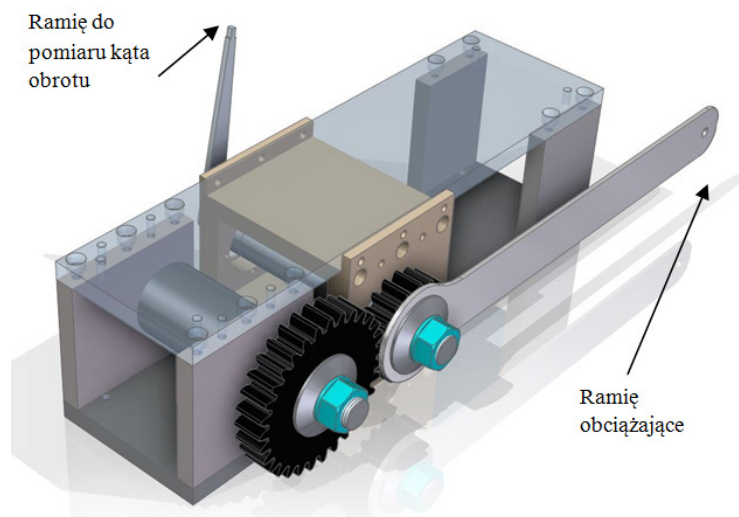
Tabela 2. Współrzędne punktów na linii przyporu

| Punkt   | T1 | A     | B      | C      | D      | E      | T2     |
|---------|----|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Wartość | 0  | 3,989 | 12,878 | 16,246 | 18,750 | 27,639 | 42,753 |

Wyznaczanie sztywności odbywa się w charakterystycznych punktach czynnego odcinka przyporu AE przez obciążanie wału zębniaka momentem skręcającym przy jednoczesnym pomiarze kąta obrotu wału, który odpowiada ugięciu zazębionych zębów kół próbek. Obciążenie realizuje się etapowo, zwiększając moment obrotowy w danym punkcie pomiarowym, mierząc jednocześnie kąt obrotu. Uśrednienie tych wartości i bazowanie w dalszych obliczeniach na średnim przyroście kąta obrotu i średnim przyroście momentu skręcającego niweluje błędy pomiarowe jakie mogą powstać podczas obciążenia tylko jednym odważnikiem [1].

### 3. Projekt stanowiska

Do wyznaczenia sztywności zazębienia przez pomiar obrotu kół próbek obciążonych momentem skręcającym wymagane jest odpowiednie stanowisko do badań eksperymentalnych. Stanowisko powinno być odpowiednio sztywne, aby jego podatność nie miała wpływu na wyniki pomiarów [8]. Model 3D stanowiska badawczego do wyznaczenia sztywności zazębienia kół walcowych przedstawiony został na rysunku 6. Model przygotowano w programie Solid Edge ST8 [13].

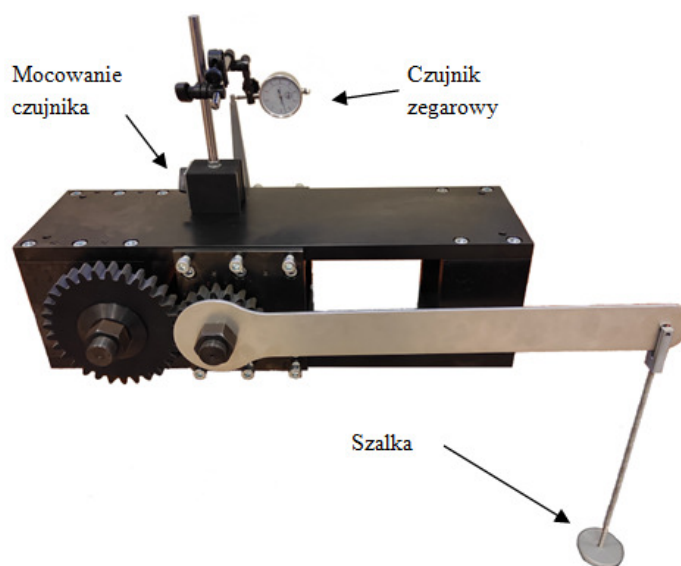


Rysunek 6. Model stanowiska

Założeniem projektu była regulowana odległości między osiami kół próbek co umożliwiła badanie różnych par kół walcowych. Części składowe stanowiska należy wykonać metodami konwencjonalnymi przez toczenie i frezowanie, dla których wykonano dokumentację konstrukcyjną 2D [2, 17]. Wszystkie elementy korpusu



zostały zamówione w formie frezowanych płyt ze stali S355J2+N grubości 20 mm w firmie FCPK Bytów, zajmującej się obróbką i sprzedażą płyt frezowanych pod zamówienie klienta. Na frezarkach wywiercono otwory pod śruby montażowe, kołki ustalające oraz mocowanie wału koła nieruchomego i gniazda łożyskowe wału koła ruchomego [12]. Na tokarce wykonane zostały wały ze stali S275JR. Gotowe stanowisko do wyznaczania sztywności zazębienia przedstawione zostało na rysunku 7.



Rysunek 7. Stanowisko badawcze

Dzięki prostej konstrukcji wykonanie części składowych stanowiska było szybkie i stosunkowo tanie w produkcji. Koszty wykonania były również istotnym aspektem brany pod uwagę na etapie projektowania stanowiska. Zębatach koła zamocowany jest na wałku obrotowym. Obciążanie wału momentem skręcającym odbywa się za pomocą ciężarów zakładanych na szalkę, która zawieszona jest na końcu ramienia obciążającego oddalonego od osi wału o 500 mm. Obciążenie zwiększa się etapowo mierząc przemieszczenie końca ramienia do pomiaru kąta obrotu. Przemieszczenie to w odniesieniu do długości ramienia (200 mm) odpowiada kątowi obrotu wału. Do pomiaru przemieszczenia wykorzystany został czujnik zegarowy, który zamocowano do korpusu stanowiska. Wychylenie wskazówki czujnika jest przeliczane na kąt obrotu pod wpływem działającego momentu skręcającego.

#### 4. Podsumowanie i kierunek dalszych badań

W niniejszej pracy został przedstawiony projekt stanowiska badawczego do wyznaczania sztywności zębatach kół walcowych. Sztywność zębatach jest podstawowym parametrem koniecznym do analizy dynamiki kół zębatach, w tym

także wykonanych z tworzyw sztucznych. Kierunek dalszych prac zmierza do przygotowania modelu numerycznego i wyznaczenia sztywności zazębienia przy użyciu Metody Elementów Skończonych [16]. Wyniki symulacji zostaną porównane z badaniami stanowiskowymi, gdyż potwierdzenie obliczeń numerycznych jest bardzo istotne. Model numeryczny powinien w jak najlepszym stopniu odzwierciedlać wyniki eksperymentu. Zatem budowa stanowiska w celu wyznaczenia sztywności zazębienia jest uzasadniona.

## LITERATURA

7. BANASIAK M., i in.: Ćwiczenia laboratoryjne z wytrzymałości materiałów. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1985.
8. DOBRZAŃSKI T.: Rysunek Techniczny Maszynowy. WNT, Warszawa 2013.
9. DREWNIAK J.: Projektowanie kół zębatych walcowych, stożkowych i ślimakowych wg norm ISO. Wydawnictwo ATH, Bielsko – Biała 2009.
10. DREWNIAK J., i in.: Laboratorium badania przekładni zębatych. Wydawnictwo PŁ Filii w Bielsku-Białej, Bielsko-Biała 2000.
11. JAŚKIEWICZ Z., WĄSIEWSKI A.: Przekładnie walcowe. Geometria – wytrzymałość – dokładność wykonania. WKŁ, Warszawa 1992.
12. JAŚKIEWICZ Z., WĄSIEWSKI A.: Przekładnie walcowe. Projektowanie. WKŁ, Warszawa 1995.
13. MARSZAŁEK J.: Metoda wyznaczania współczynnika dynamicznego przekładni zębatej walcowej. Praca inżynierska. ATH, Bielsko – Biała 2012.
14. MULLER L.: Przekładnie zębate – badania. WNT, Warszawa 1984.
15. MULLER L.: Przekładnie zębate – projektowanie. WNT, Warszawa 1996.
16. OCHELSKI S.: Metody doświadczalne mechaniki kompozytów konstrukcyjnych. WNT Warszawa 2004.
17. PIKOŃ A.: AutoCAD 2018. Helion, Gliwice 1995.
18. SKOĆ A., ŚWITOŃSKI E.: Przekładnie zębate. WNT Warszawa 2017.
19. SZYMCZAK P.: Solid Edge ST7 Synchronous Technology e-Podręcznik użytkownika. SIEMENS PLM Software PLATINUM Partner FY 2015.
20. ZIEMIAŃSKI K.: Zastosowanie tworzyw sztucznych w budowie maszyn. Politechnika Wrocławska, 1995, 13-18.
21. PN-ISO 53: 2001: Przekładnie zębate walcowe ogólnego przeznaczenia oraz dla przemysłu ciężkiego - Zarys odniesienia.
22. NX Nastran Numerical Methods User's Guide. Siemens Product Lifecycle Management Software Inc. 2011.
23. Poradnik Mechanika. Praca Zbiorowa. Warszawa : REA-SJ 2015.
24. Serwis internetowy dystrybutora półfabrykatów z tworzyw sztucznych TERMOPLASTIK: <https://termoplastik.pl/poliamid-pa6-mos2-dwusiarczek-molibdenu>, 21.10.2020.
25. Serwis internetowy wytwórcy i sprzedawcy tworzyw sztucznych AIKOLON: <https://www.aikolon.fi/en/products/technical-plastics/pa-6-g-mos-2>, 21.10.2020