

Andrzej KOŹMIC¹, Krystian SKOWRON²

Opiekun naukowy: Sławomir HERMA³

DOI: <https://doi.org/10.53052/9788366249868.12>

CHAOS DETERMINISTYCZNY

Streszczenie: Według anegdoty, przesłanką do rozpoczęcia pracy nad teorią chaosu była przypadkowa obserwacja poczyniona przez Edwarda Lorenza w latach 60. XX w. podczas pracy nad komputerowym prognozowaniem pogody. W artykule zostanie wyjaśnione czym jest chaos deterministyczny. Zostanie zaprezentowane rozwiązanie równań ruchu, wahadła podwójnego dla małych kątów, a następnie przedstawiona implementacja numeryczna w środowisku MS Excel z wykorzystaniem VBA.

Słowa kluczowe: II zasada dynamiki, efekt motyla, współrzędne biegunowe, wahadło podwójne, Lagrange, równania Eulera-Lagrange'a, stopnie swobody

DETERMINISTIC CHAOS

Summary: According to the anecdote, the rationale for starting work on the theory of chaos was an accidental observation made by Edward Lorenz in the 1960s while working on computer weather forecasting. The article will explain what deterministic chaos is. The solution of the equations of motion, the double rod pendulum for small angles will be presented, and then the numerical implementation in the MS Excel environment with the use of VBA will be presented.

Keywords: Newton's second law of motion, butterfly effect, polar coordinates, double rod pendulum, Lagrange, Euler-Lagrange equation, degrees of freedom

1. Rys historyczny

Lata 60. XXI wieku. Edward Lorenz, amerykański matematyk i meteorolog pracował wtedy nad komputerowym prognozowaniem pogody. Chcąc opisać ją w sposób matematyczny tworzył on kilkanaście równań, w których zawarł związki między ciśnieniem, prędkością wiatru, temperaturą. W tych czasach w nauce panował jeszcze deterministyczny pogląd, że „minimalna zmiana warunków początkowych daje

¹ mgr, V Liceum Ogólnokształcące w Bielsku-Białej, andrzej.kozmic@lo5.bielsko.pl

² V Liceum Ogólnokształcące w Bielsku-Białej, krystianskowron@onet.pl

³ Dr inż., Katedra Inżynierii Produkcji ATH, sherma@ath.bielsko.pl

w rezultacie proporcjonalnie niewielkie zmiany wyników”. Jednakże według anegdoty po wprowadzeniu jednej z wartości początkowych do równań, w jednym modelu z dokładnością do 5 cyfr znaczących, a do drugiego z dokładnością do 2, różnice w wynikach okazały się znaczące i coraz bardziej odbiegające od siebie w czasie, mimo że dane wejściowe jedynie jednej zmiennej różniły się o około 1/40 – w zasadzie to była ta sama wartość liczbowa, tylko podana z różną dokładnością. Wyniki tego prostego doświadczenia zmieniły nasze patrzenie na rzeczywistość i uczyniły z Edwarda Lorenza pioniera w teorii chaosu. Podobne „doświadczenie” można przeprowadzić samodzielnie w arkuszu kalkulacyjnym dla ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_{n-1}q.$$

Po przyjęciu kryteriów początkowych $a_1 = 1$ i $q = 5$ dla jednego ciągu i $b_1 = 1,0001$ i $q = 5$ dla drugiego i wygenerowaniu kolejnych wyrazów dla obu ciągów można zobaczyć już znaczne różnice dla 10-tych wyrazów. Ilustruje to poniższa tabela zawierająca różnicę wyrazów ciągu a_n i b_n :

Tabela 1. Różnice między n -tymi wyrazami ciągów a_n i b_n .

który wyraz	$b_n - a_n$
11	997
21	$9,53 \cdot 10^{10}$
51	$8,88 \cdot 10^{30}$
71	$6,78 \cdot 10^{42}$
101	$6,31 \cdot 10^{63}$

Taka duża wrażliwość równań na małe zmiany parametrów początkowych to chaos deterministyczny. Wg encyklopedii PWN, definicja determinizmu przedstawia się następująco:

„Determinizm to pogląd, zgodnie z którym zajście każdego zdarzenia (zjawiska) jest wyznaczone jednoznacznie przez zdarzenie (zjawisko) poprzedzające je w czasie; stanowi zasadę wyjaśnienia prawidłowości i przewidywania zdarzeń (zjawisk) [3].”

Natomiast chaos deterministyczny to:

„Nieregularne, nieuporządkowane zachowanie się układów deterministycznych, praktycznie nieprzewidywalne w dłuższych przedziałach czasu [4].”

Wg definicji determinizmu można opisać prawie każde zjawisko skomplikowanymi układami równań różniczkowych. Nie zawsze istnieje rozwiązanie ogólne, ale istnieją metody numeryczne, które pozwalają zasymulować zjawisko dla pewnych parametrów początkowych, podanych z dowolną dokładnością. Te same metody numeryczne przez swoją ograniczoną dokładność i niemożliwość zmierzenia wszystkiego dokładnie nie pozwalają opisać układów dynamicznych, bo każdy układ, który zachowuje się nieokresowo jest nieprzewidywalny.

1.1 Chaos deterministyczny dziś

Powszechnie w popkulturze zjawisko chaosu deterministycznego znane jest pod nazwą efekt motyla, której nazwa wzięta się od anegdoty, że trzepot skrzydeł motyla w Chinach może kilka dni później prowadzić do nieprzewidywalnych zmian pogodowych w USA. To zjawisko obserwowane jest szczególnie silne

w prognozowaniu pogody. Nie można jej dokładnie przewidzieć. Głównie z powodu niemożności dokładnego zmierzenia warunków atmosferycznych w danej chwili i niedoskonałości maszyn liczących. Przez to, nie istnieje dokładna prognoza pogody na więcej niż 3 dni, a nawet takiej krótkotrwałej nie można w pełni zaufać.

Zjawisko chaosu deterministycznego może się wydawać abstrakcyjne. Pogoda jest bardzo skomplikowanym przykładem, który stwarza wrażenie, że zjawisko nie da się przedstawić w prostszych układach. To jest oczywiście nieprawda. Omawiane zagadnienie towarzyszy ludzkości na co dzień. Bilard i gra w kości to ilustrują. Można opisać równaniami, ruch kuli bilardowej lub kostki, podczas rzutu jednak niewielka zmiana sposobu, kąta uderzenia w kulę lub delikatna zmiana trajektorii lotu kostki całkowicie zmienia wyrzuconą liczbę oczek lub dalsze losy gry w przypadku gry w bilard. To zjawisko nie jest badane tylko i wyłącznie w naukach matematyczno-przyrodniczych z których się wywodzi. Również nauki medyczne, ekonomiczne i społeczne są zainteresowane tym zagadnieniem. Jak wpływa zaburzenie pracy serca lub mózgu na cały organizm lub jak małe wydarzenie ma wpływ na późniejszą katastrofę.

1.2 Chaos deterministyczny wokół nas

Zjawisko chaosu deterministycznego można zasymulować w szkolnej pracowni fizycznej w postaci matematycznego wahadła podwójnego lub wahadła zbudowanego z ciężarka na sprężynie. W tym artykule zostanie dokładnie omówione matematycznie wahadło podwójne i rozwiązane w oparciu o trzy zasady dynamiki Newtona.

2. Wahadło podwójne

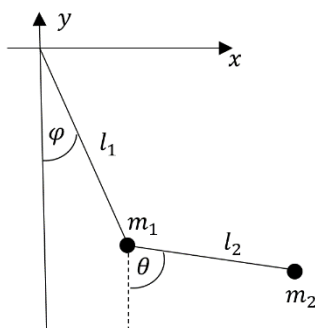
W niniejszej pracy przez wahadło podwójne są rozumiane dwa wahadła matematyczne (jedno przyczepione do końca drugiego). Masy zawieszono na nich są punktowe, a nici nieważkie, sztywne, nierozciągliwe i nieskrętlive – czyli nici są traktowane jak nieważkie pręty.

2.1. Wyprowadzenie wahadła

Rozważmy wahadło matematyczne podwójne. Taki układ zbudowany jest z dwóch punktów materialnych o masach m_1 i m_2 , połączonych linkami o długościach l_1 i l_2 . Całość jest umieszczona w jednorodnym polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g . Schemat badanego układu przedstawiono na rysunku 1.

Ruch wahadła odbywa się w płaszczyźnie XY . Jako współrzędne potrzebne do opisu ruchu wybrano kąty φ i θ . Przy czym należy pamiętać, że zachodzi:

$$\varphi = \varphi(t) \text{ oraz } \theta = \theta(t).$$



Rysunek 1. Schemat rozważanego wahadła podwójnego

W celu znalezienia równań ruchu wykorzystano formalizm Lagrange'a. Niech współrzędne dla pierwszego równania wynoszą:

$$x_1 = l_1 \sin \varphi,$$

$$y_1 = -l_1 \cos \varphi.$$

Natomiast dla drugiego wahadła:

$$x_2 = l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \theta,$$

$$y_2 = -l_1 \cos \varphi - l_2 \cos \theta,$$

co łatwo wykazać posługując się rysunkiem nr 1.

Współrzędne prędkości wynoszą odpowiednio:

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{x}_2 = l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + l_2 \dot{\theta} \cos \theta,$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi + l_2 \dot{\theta} \sin \theta.$$

Energia kinetyczna T i energia potencjalna V układu wynoszą:

$$T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) =$$

$$\frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2} (l_1^2 \dot{\varphi}^2 + l_2^2 \dot{\theta}^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta)) =$$

$$\frac{1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}^2 (m_1 + m_2) + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta),$$

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi - m_2 g l_2 \cos \theta.$$

Na tej podstawie obliczono lagranżjan układu:

$$L = T - V.$$

Następnie użyto równania Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

W omawianym przypadku :

$$q_1 = \varphi \text{ oraz } q_2 = \theta.$$

Po wykonaniu obliczeń, otrzymano równania, które przedstawiono w postaci wygodnej do obliczeń numerycznych:

$$\ddot{\varphi} = - \frac{g(2m_1 + m_2) \sin \varphi + g m_2 \sin(\varphi - 2\theta) + 2m_2 \sin(\varphi - \theta)(l_1 \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi}^2 + l_2 \dot{\theta}^2)}{2l_1(m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(\varphi - \theta))},$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin(\varphi - \theta)((m_1 + m_2)(g \cos \varphi + l_1 \dot{\varphi}^2) + l_2 m_2 \cos(\varphi - \theta) \dot{\theta}^2)}{l_2(m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(\varphi - \theta))}$$

Powyższe równania zostały zaimplementowane w MS Excel w języku VBA. Istnieje rozwiązanie przybliżone dla małych kątów. Wówczas korzystając z szeregu Taylora dla $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ oraz $\sin x \approx x$. Można wykazać, że rozwiązania równań ruchu da się przedstawić w postaci [2]:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \gamma),$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \gamma).$$

ale nie jest to częścią tego artykułu.

3. Implementacja w Microsoft Excel

3.1 Ustalenia – metoda numeryczna

Rozwiązanie numeryczne korzysta z założenia stałości przyspieszenia kąowego w małych okresach czasu dt . Używając równań $\ddot{\varphi}(t)$ i $\ddot{\theta}(t)$ wyliczono wartości obu przyspieszeń dla danego czasu t następnie wartości $\dot{\varphi}(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\varphi(t)$ i $\theta(t)$ z równań kinematycznych dla ruchu z stałym przyspieszeniem kąowym. Omówiona metoda może być zapisana w postaci [1]:

$$\dot{\varphi}(t + \Delta t) = \dot{\varphi}(t) + \ddot{\varphi}(t) \cdot \Delta t,$$

$$\dot{\theta}(t + \Delta t) = \dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t) \cdot \Delta t,$$

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \dot{\varphi}(t + \Delta t) \cdot \Delta t,$$

$$\theta(t + \Delta t) = \theta(t) + \dot{\theta}(t + \Delta t) \cdot \Delta t.$$

Przedstawiona metoda jest odmianą prostej metody Eulera i w literaturze jest spotykana pod nazwą „algorytmu szkolnego”. Omówiony sposób wykazuje dużą stabilność podczas wielu iteracji.

3.2 Wprowadzanie danych

Dane potrzebne do rozwiązania to: $m_1, m_2, l_1, l_2, \varphi_0, \theta_0$. Dla wygody użytkownika kąty podano w stopniach. Rysunek 2 przedstawia pola do wprowadzania danych w arkuszu kalkulacyjnym. Wartości g i dt zostały przyjęte odgórnie i wynoszą kolejno $10 \frac{m}{s^2}$ i $0,01s$.

m1	1,0 kg
m2	1,0 kg
l1	1,0 m
l2	0,5 m
fi1	150 stopnie
fi2	180 stopnie

Rysunek 2. Zrzut ekranu z arkusza kalkulacyjnego – tabelka zawierająca wartości początkowe układu.

3.3 Generacja kolejnych położeń wahadła i ilustracji graficznej

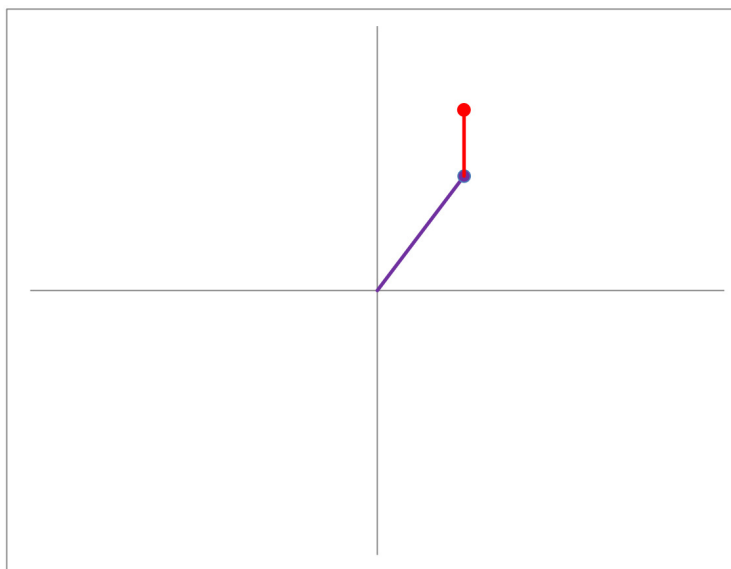
Korzystając z procedury przedstawionej w paragrafie 3.1 są generowane kolejne położenia początków i końców obu wahadeł w czasie trwania ruchu. Zauważmy, że współrzędne końca są wspólne dla obu wahadeł i początek pierwszego z nich jest zawsze w początku układu współrzędnych.

Pierwsze	
X	Y
0	0
0,5	0,866025

Drugie	
X	Y
0,5	0,866025
0,5	1,366025

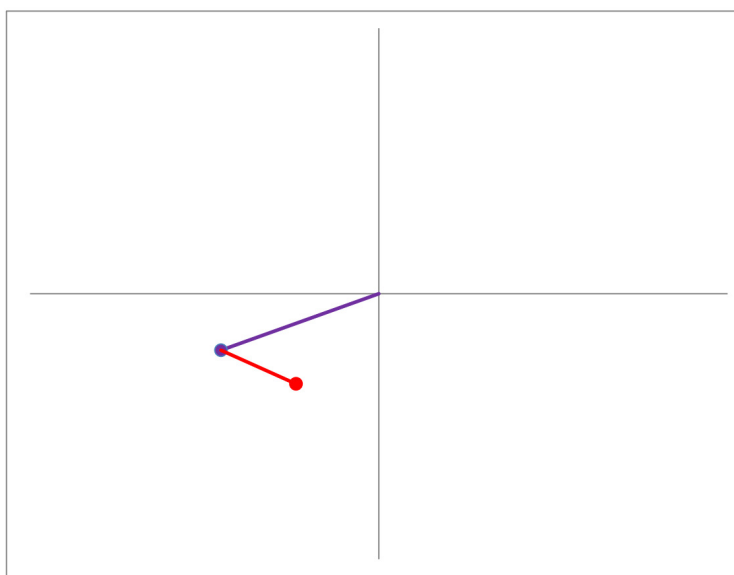
Rysunek 3. Zrzut ekranu z arkusza kalkulacyjnego – tabelka zawierająca położenie dwóch końców obu wahadeł w chwili t_0 .

Otrzymane dane przedstawiono na wykresie. W celu otrzymania animacji dane wyjściowe są ciągle wypisywane w to samo miejsce, następnie ekran arkusza jest odświeżany. Otrzymano w ten sposób efekt płynności i ruchu wahadła. Rysunek 4 to wahadło w chwili początkowej dla danych przedstawionych na rysunku 2.



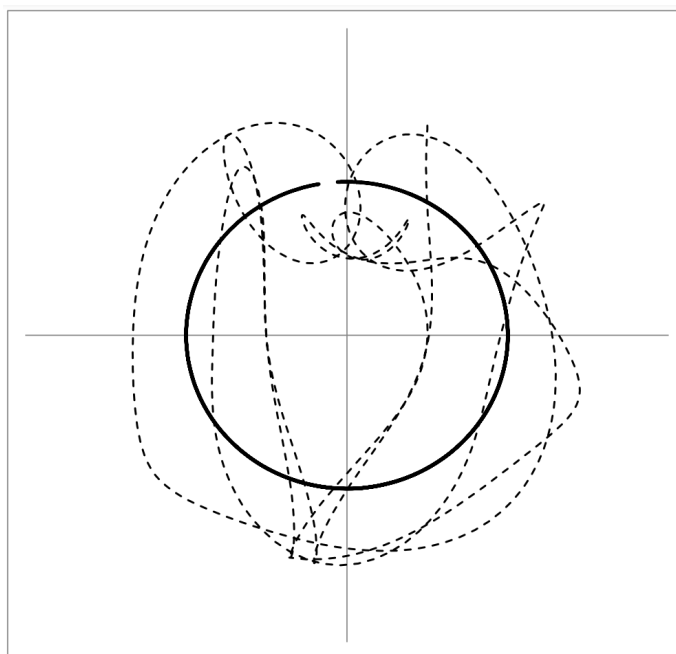
Rysunek 4. Zrzut ekranu z arkusza kalkulacyjnego – wykres przedstawiający wahadło w stanie początkowym dla parametrów z rysunku 2

Po włączeniu animacji położenia wahadła się zmienia. Na rysunku 5 zaprezentowano położenia wahadła po pewnym czasie .



Rysunek 5. Zrzut ekranu z arkusza kalkulacyjnego – wykres przedstawiający położenie wahadła po pewnym czasie.

Na rysunku 6 przedstawiono położenie poszczególnych wahadeł dla pierwszych 10 sekund ruchu.



Rysunek 6. Położenie wahadeł

Na rysunku 6 linią ciągłą przedstawiono położenie pierwszego wahadła matematycznego, jego torem ruchu jest zawsze fragment okręgu, dla większego czasu animacji położenia tego wahadła zakreślają pełny okrąg. Linia przerywana prezentuje położenie końca drugiego wahadła. Jego tor ruchu jest chaotyczny i nieprzewidywalny.

4. Podsumowanie

Analiza dynamiki wahadła podwójnego, jako przykładu układu nieliniowego jest zagadnieniem czasochłonnym. Wyprowadzenie równań na przyspieszenie każdego z wahadeł jest trudne bez zastosowania równań Lagrange'a lub innego aparatu matematycznego. Bez względu no to, jaką drogę dojścia do równań ruchu się wybierze, konieczna jest kontrola poprawności otrzymanych wyników. W pracy zaprezentowano układ, który był badany już przez innych badaczy, jednak głównym celem było przedstawienie programu MS Excel, jako narzędzia do rozwiązywania numerycznego równań oraz zaprezentowania w nim animacji badanego układu. Znaczącą wadą, tego programu, jak i każdego programu obliczeniowego jest niemożność obserwacji układów w większej skali czasu, ze względu na ograniczoną dokładność obliczeniową używanych środowisk. Łatwość modelowania numerycznego w MS Excel, sprawia, że jest to świetny program dla badaczy, uczniów i studentów.

LITERATURA

1. HERMA S., KURCZYK D., NOWAK W.: Programowanie w języku VBA w środowisku MS Excel, V LO w Bielsku-Białej, Bielsko-Biała 2015 r.
2. TURZYŃSKI K, *Skrypt, Mechanika klasyczna*, Uniwersytet Warszawski, 2018 r.
3. Encyklopedia PWN, dostęp: 29.10.2021 r.
<https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/chaos-deterministyczny;3884748.html>
4. Encyklopedia PWN, dostęp: 29.10.2021 r.
<https://encyklopedia.pwn.pl/encyklopedia/dysypatywny.html>