DOI: https://doi.org/10.53052/9788366249974.26

Damian KOLNY[1], Joanna STUGLIK[2]

Opiekun naukowy: Stanisław PŁONKA[3]

WYZNACZANIE HARMONOGRAMÓW OPTYMALNYCH METODĄ PODZIAŁU I OGRANICZEŃ

Streszczenie: W artykule zdefiniowano problem harmonogramowania produkcji i dokonano analizy podstawowej literatury z zakresu metod poszukujących dokładnych rozwiązań zadań harmonogramowania oraz szczegółowo omówiono metodę podziału i ograniczeń do wyznaczania harmonogramów optymalnych. Zamieszczono konkretny przykład wyznaczania harmonogramu optymalnego z zastosowaniem metody podziału i ograniczeń dla procesów wytwarzania części klasy wałek stopniowany obejmujący cztery wyroby, których obróbka realizowana jest na trzech maszynach.

Słowa kluczowe: planowanie produkcji, harmonogramowanie, metoda podziału i ograniczeń

DETERMINATION OF OPTIMAL SCHEDULES USING BRANCH AND BOUND METHOD

Summary: The article defines the problem of production scheduling and analyzes the basic literature in the field of methods searching for exact solutions to scheduling tasks, and discusses in detail the branch and bound method for determination of optimal schedules. A specific example of determination the optimal schedule with the use of the branch and bound method for the production processes was introduced. The processing of parts of the stepped shaft includes four products, carried out on three machines was considered in the example.

Keywords: production planning, scheduling, branch and bound method

1. Wprowadzenie

W ramach planowania produkcji rozróżnia się następujące generalne etapy planowania: planowanie programu produkcyjnego, harmonogramowanie ogólne,

[1] mgr inż., Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Katedra Inżynierii Produkcji, dkolny@ath.bielsko.pl
[2] dr Małopolska Uczelnia Państwowa im. rtm. W. Pileckiego w Oświęcimiu, Instytut Zarządzania i Inżynierii Produkcji, joanna.stuglik@pwsz-oswiecim.edu.pl
[3] prof. dr hab. inż. Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, splonka@ath.bielsko.pl

planowanie potrzeb materiałowych oraz szczegółowe harmonogramowanie produkcji. Planowanie programu produkcyjnego polega na określeniu wielkości produkcji na podstawie istniejących zamówień klientów, a także na podstawie prognozy sprzedaży oraz stanów magazynowych wyrobów gotowych.
Harmonogramowanie ogólne obejmuje określenie terminów rozpoczęcia i zakończenia realizacji zleceń na podstawie bilansu zdolności produkcyjnych i potrzeb produkcyjnych wynikających z zaplanowanej wielkości produkcji. Planowanie potrzeb materiałowych dotyczy przygotowania surowców, materiałów, półwyrobów, materiałów pomocniczych i eksploatacyjnych, części i podzespołów, jakie są niezbędne do realizacji produkcji. Szczegółowe harmonogramowanie produkcji sprowadza się do podziału zleceń na serie produkcyjne, określeniu terminów rozpoczęcia i zakończenia serii produkcyjnych i operacji na podstawie czasów obróbki i czasów transportu między stanowiskami oraz przypisaniu operacji do odpowiednich stanowisk [1-3].
Ogólny problem harmonogramowania polega na tym, aby przy uwzględnieniu ograniczeń technologicznych – kolejności wykonywania poszczególnych operacji w ramach zleceń – ustalić terminy rozpoczęcia i zakończenia wykonywania operacji na poszczególnych maszynach, tak aby minimalizować lub maksymalizować określoną funkcję będącą miarą jakości harmonogramu. Rozwiązanie tego problemu za pomocą metod analitycznych jest trudne ze względu na dużą złożoność obliczeniową. Złożoność ta wynika z dużej liczby wszystkich możliwych wariantów kolejności operacji wytwarzania części na maszynach i rośnie wykładniczo wraz ze wzrostem liczby maszyn i przewidzianych do obróbki części. Optymalne algorytmy opracowano tylko dla problemów z jedną i z dwoma maszynami (np. algorytm Johnsona). Jak również z trzema maszynami przy założeniu, że czas trwania najkrótszej operacji na pierwszej maszynie jest większy lub równy czasowi trwania najdłuższej operacji na drugiej maszynie ($min(p_{1i}) \geq max(p_{2i})$) albo czas trwania najkrótszej operacji na trzeciej maszynie jest większy lub równy czasowi trwania najdłuższej operacji na maszynie drugiej ($min(p_{3i}) \geq max\ (p_{2i})$) [2].
Problemy harmonogramowania produkcji można ogólnie sklasyfikować uwzględniając następujące trzy aspekty systemów produkcyjnych: generowanie zadań produkcyjnych, złożoność procesu produkcyjnego reprezentowana przede wszystkim przez liczbę operacji produkcyjnych związanych z wytwarzaniem każdego wyrobu oraz kryterium optymalności ze względu na czas realizacji zlecenia [2].
Maszyny w systemach produkcyjnych, na których są wykonywane operacje mogą być równoległe, tzn. realizujące te same operacje, albo dedykowane, tzn. realizujące różne operacje. W przypadku maszyn dedykowanych wyróżnia się następujące rodzaje procesów produkcyjnych: przepływowy (ang. *flow shop*), gniazdowy (ang. *job shop*) oraz otwarty (ang. *open shop*) [2].
Z punktu widzenia złożoności obliczeniowej, znakomita większość problemów harmonogramowania produkcji należy do klasy problemów optymalizacyjnych tzw. trudnych [1, 2], dla których nie można skonstruować algorytmów optymalizacji o złożoności wielomianowej. Dlatego dla tych zagadnień usprawiedliwione jest stosowanie prostych algorytmów przybliżonych, zaś badania ukierunkowuje się na ocenę jakości takich algorytmów w sensie „odległości" otrzymywanych rozwiązań od optimum.
Metody poszukiwania rozwiązań problemów harmonogramowania szczegółowo przedstawiono w pracach [1–6]. Przykładowo w pracy [2] m.in. zamieszczono

harmonogramowanie dyskretnych procesów produkcyjnych (szeregowanie operacji na pojedynczej maszynie i na maszynach równoległych, harmonogramowanie wielooperacyjnego procesu produkcyjnego typu przepływowego metodą podziału i ograniczeń, harmonogramowanie wielooperacyjnego procesu produkcyjnego typu gniazdowego za pomocą reguł dyspozytorskich), harmonogramowanie elastycznych linii produkcyjnych (z maszynami równoległymi, szeregowanie części i serii części w linii produkcyjnej z buforami międzyoperacyjnymi), harmonogramowanie elastycznych gniazd i sieci produkcyjnych. W pracy [3] omówiono metody poszukiwania dokładnych rozwiązań zadań harmonogramowania (przeszukiwanie zupełne i przeszukiwanie losowe, programowanie całkowitoliczbowe, metodę podziału i ograniczeń, algorytmy heurystyczne jednokrotne i korygujące). Dużo miejsca przeznaczono na omówienie zastosowania algorytmów ewolucyjnych do harmonogramowania produkcji (w tym hybrydowy system harmonogramowania bazujący na algorytmie genetycznym oraz na sieci neuronowej). Natomiast w pracy [4] w sposób szczegółowy przedstawiono problemy jednomaszynowe (algorytmy aproksymacyjne, algorytm C, algorytm blokowy GNZ, algorytmy przybliżone, algorytm blokowy ZG), problemy przepływowe (algorytmy dokładne, algorytmy przybliżone: priorytetowe, oparte na metodzie redukcji liczby maszyn, relaksacji możliwości wykonawczych maszyn oraz oparte na metodzie wstawień), problemy gniazdowe (metodę blokową: metodę podziału i ograniczeń, algorytm Gifflera i Thompsona, algorytm Carliera i Pinsona, metodę blokową z maszynami równoległymi, algorytmy konstrukcyjne: priorytetowe, typu wstaw, przesuwanego wąskiego gardła).

Metoda podziału i ograniczeń, oprócz metod heurystycznych, należy do najczęściej stosowanych przy rozwiązywaniu zadań harmonogramowania i może być stosowana do różnych klas problemów [2, 3].

2. Metoda podziału i ograniczeń

W metodzie podziału i ograniczeń każdemu wierzchołkowi drzewa rozwiązań dopuszczalnych odpowiada harmonogram dla pewnego podzbioru operacji. Wierzchołek, to także moment czasu, w którym można włączyć w już zbudowany częściowy harmonogram kolejną operację. Każda gałąź wychodząca z wierzchołka oznacza wybór jednej z możliwych operacji.

Istota metody polega na tym, że odcina ona pewne gałęzie drzewa rozwiązań dopuszczalnych, przez co obszar poszukiwań staje się bardziej ograniczony. Wykorzystuje przy tym tak zwane dolne i górne ograniczenie wartości funkcji celu (długości gałęzi drzewa możliwych uszeregowań). Wygenerowane dotąd najlepsze rozwiązanie określa aktualne górne ograniczenie funkcji celu. Na początku przeszukiwania górne ograniczenie funkcji celu jest zazwyczaj generowane za pomocą metod heurystycznych. Dolne ograniczenie funkcji celu dla każdego węzła drzewa przeszukiwań jest obliczane na podstawie drogi od wierzchołków drzewa do aktualnie rozpatrywanego węzła. Najbardziej rozpowszechnionym sposobem generowania węzłów jest metoda przeszukiwania w głąb. Przeszukiwanie w głąb oznacza wprowadzanie do harmonogramu coraz większej liczby operacji, co zazwyczaj powoduje wzrost wartości funkcji celu. Jeżeli dolne ograniczenie staje się większe od górnego, czyli budowany właśnie harmonogram H będzie na pewno gorszy od zbudowanego wcześniej harmonogramu *H'*, to dalsze budowanie harmonogramu *H*, czyli dalsze przeszukiwanie danej gałęzi drzewa, jest bezsensowne. Kalkulacja wartości dolnego ograniczenia może być na przykład oparta na zleceniach (pracach) lub na maszynach [3].

Wyznaczenie harmonogramu optymalnego dla permutacyjnego problemu przepływowego FP3│ │C_{max} wymaga przeglądu drzewa wszystkich uszeregowań częściowych za pomocą wyżej omówionej metody.

Rozwiązanie problemu sprowadza się do wyznaczenia permutacji n wyrobów $\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}$ określającej kolejność ich wykonywania na poszczególnych maszynach. W drzewie rozwiązań wierzchołki należące do k-tego poziomu (k=1,2,…,n) reprezentują wyroby, które mogą wystąpić dla k-tej poszukiwanej permutacji, zaś drogi prowadzące do nich – uszeregowania częściowe k pierwszych wyrobów. Drzewo rozwiązań buduje się w następujący sposób [2]:

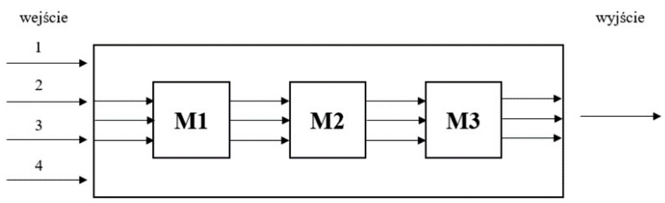
- z węzła początkowego *0* wyprowadza się n krawędzi odpowiadających n możliwościom wystąpienia każdego wyrobu na pierwszym miejscu w szukanej sekwencji;
- z każdym z n pierwszych wierzchołków związanych będzie (n - 1) pozostałych wyrobów, które mogą znaleźć się na drugim miejscu sekwencji, tak więc z każdego wierzchołka $l \in \{1,2,\ldots,n\}$ pierwszego poziomu może wyjść (n – 1) krawędzi;
- dla każdego z otrzymanych w ten sposób wierzchołków drugiego poziomu $l \in \{n+1,n+2,\ldots,2n-1\}$ może wychodzić (n – 2) krawędzi odpowiadających (n – 2) pozostałym wyrobom itd.

Z każdym wierzchołkiem k-tego poziomu drzewa rozwiązań jest związane uszeregowanie częściowe $R = \{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ obejmujące k uporządkowanych wyrobów oraz zbiór $S = \{1,2,\ldots,n\}\backslash\{i_1, i_2,\ldots,i_k\}$ pozostałych wyrobów. Aby ograniczyć liczbę koniecznych do przeglądnięcia wierzchołków drzewa uszeregowań częściowych, dla każdego aktualnie rozpatrywanego wierzchołka wyznacza się dolne oszacowanie LBC_{max} długości C^*_{max} gałęzi drzewa możliwych uszeregowań dla pełnego uszeregowania, które można otrzymać z danego uszeregowania częściowego. Rozbudowywane są tylko takie uszeregowania częściowe, którym odpowiadają najmniejsze wartości dolnych oszacowań LBC_{max}.

Większość znanych sposobów wyznaczania dolnego oszacowania opiera się na rozumowaniu zamieszczonym w pracy [2].

3. Sformułowanie problemu i wyznaczenie uszeregowania optymalnego

Rozpatrywano przypadek systemu produkcyjnego typu przepływowego składającego się z m=3 maszyn, na których wytwarzane są n=4 wyroby (zlecenia) (rys. 1).



Rysunek 1. Struktura procesu produkcyjnego typu przepływowego dla 3 maszyn i 4 wyrobów

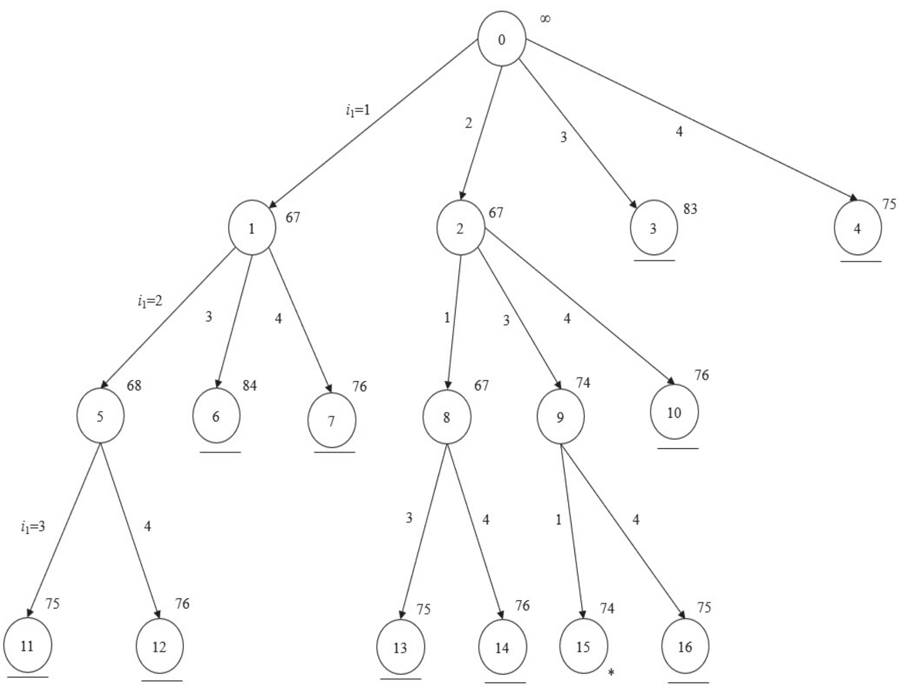
Każde zlecenie dotyczy określonego wyrobu klasy wałek stopniowany. Przyjęto, że półfabrykatem do wykonania każdego z wyrobów będzie odkuwka swobodna, która będzie wymagała realizacji trzech operacji: planowania czół i wykonania nakiełków, toczenia i frezowania rowka lub rowków wpustowych oraz ręcznego załamania ostrych krawędzi rowka (z zaznaczeniem, że operacja załamania krawędzi jest wykonywana przez operatora frezarki CNC w trakcie frezowania rowka w kolejnym wyrobie). Kryterium celu jest minimum największej możliwej długości C_{max} pełnego uszeregowania, a więc mamy do czynienia z problemem $FP3 \mid \mid C_{max}$.

Czasy wykonywania operacji dla poszczególnych wyrobów na kolejnych maszynach p_{ji} (j=1, 2, 3; i=1, 2, 3, 4) zapisano w postaci tablicy

$$[p_{ji}] = \begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 15 & 9 & 28 & 4 \\ 5 & 14 & 11 & 8 \\ 14 & 18 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Przyjęto, że wszystkie zlecenia są znane na początku okresu planowania. Operacje nie mogą być przerywane. Kolejna operacja może się rozpocząć dopiero po zakończeniu poprzedniej operacji. Pominięto czas transportu między stanowiskowego i ograniczenia międzyoperacyjne.

Dla przykładu przedstawionego powyżej drzewo uszeregowań częściowych przedstawiono na rysunku 2.

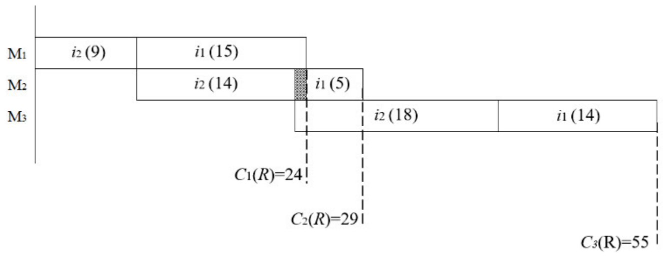


Rysunek 2. Drzewo uszeregowań częściowych

Wierzchołki oznaczono numerami w kolejności ich rozpatrywania. Każdy z nich reprezentuje uszeregowanie częściowe R i podzbiór pozostałych wyrobów S. Wartości dolnych oszacowań $LBC_{\max}$ zapisano obok odpowiednich wierzchołków. Oszacowania te wyznaczono według wzoru, który dla rozważanego problemu trzymaszynowego (m = 3) przyjmuje następującą postać

$$LBC_{\max} = \max \{ \quad C_1(R) + \textstyle\sum_{i \in S} p_{1i} + \min_{i \in S} \{p_{2i} + p_{3i}\},$$
$$C_2(R) + \textstyle\sum_{i \in S} p_{2i} + \min_{i \in S} \{p_{3i}\},$$
$$C_3(R) + \textstyle\sum_{i \in S} p_{3i}\}.$$

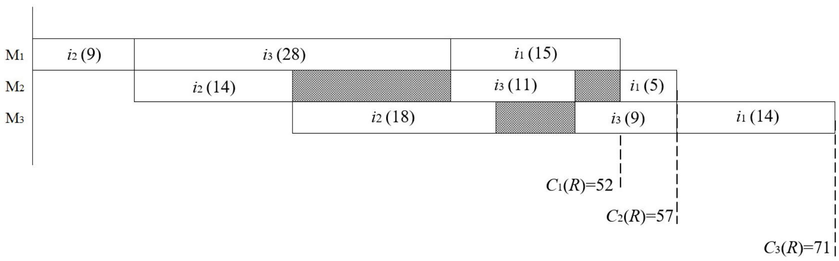
Przykładowo uszeregowanie częściowe dla wierzchołka 8 drzewa z rysunku 2 przedstawiono na rysunku 3, natomiast dla wierzchołka 15 na rysunku 4.



Rysunek 3. Uszeregowanie częściowe dla wierzchołka 8 drzewa z rys. 2

Dolne oszacowanie $LBC_{\max}$ dla wierzchołka 8, dla którego R=[i_2; i_1], S={i_3; i_4} oraz z rysunku 3 – $C_1(R)$ = 24, $C_2(R)$ = 29, $C_3(R)$ = 55.
Stąd dolne oszacowanie $LBC_{\max}$,

$LBC_{\max}$ = max{24 + (28 + 4) + min(11+9; 8+3); 29 + (11 + 8) + min(9; 3); 55 + (9 + 3)} = max{56 + min(20; 11); 48 + 3; 55 + 12}= max{67; 51; 67} = 67.

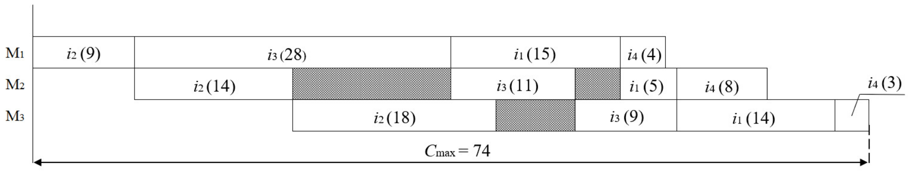


Rysunek 4. Uszeregowanie częściowe dla wierzchołka 15 drzewa z rys. 2

Dolne oszacowanie $LBC_{\max}$ dla wierzchołka 15, dla którego R=[i_2; i_3; i_1], S={i_4} oraz z rysunku 4 – $C_1(R)$ = 52, $C_2(R)$ = 57, $C_3(R)$ = 71.
Stąd dolne oszacowanie $LBC_{\max}$,

$LBC_{\max}$ = max{52 + 4 + min(8+3); 57 + 8 + 3; 71 + 3)} = max{56 + 11); 68; 74}= max{67; 68; 74} = 74.

Optymalne uszeregowanie wyrobów (realizacji wykonywania tych wyrobów) jest następujące: {i_2; i_3; i_1; i_4}, a długość tego uszeregowania wynosi C_{max} = 74 i jest związane z wierzchołkiem 15 drzewa (rys. 2). Wierzchołki podkreślone (tzw. wierzchołki zamknięte) dotyczą tych uszeregowań częściowych, których uzupełnienie nie było korzystne z powodu odpowiadających im zbyt dużych wartości dolnego oszacowania LBC_{max}. Na rysunku 5 przedstawiono uszeregowanie optymalne (harmonogram optymalny) dające minimalną długość C_{max}.



Rysunek 5. Uszeregowanie optymalne (harmonogram optymalny)

Wartości dolnych oszacowań LBC_{max} dla wierzchołków: 11; 12; 13; 14; 15 i 16 odpowiadają terminom zakończenia wykonywania wszystkich wyrobów dla kolejności określonej przez permutacje (uszeregowanie lub ułożenie) Π_{11}; Π_{12}; Π_{13}; Π_{14}; Π_{15} i Π_{16} oraz są równe wartościom długości uszeregowania C_{max} dla odpowiadających permutacji.
Przyporządkowując termin (czas) rozpoczęcia pierwszej operacji dla wyrobu drugiego (i_2) i operacji kolejnych dla wszystkich czterech wyrobów (zleceń) uszeregowania optymalnego, otrzymuje się harmonogram optymalny. Realizacja zleceń (wytwarzanie wyrobów) według uszeregowania optymalnego zapewnia minimalizację terminu zakończenia wykonywania wszystkich czterech wyrobów (min C_{max}).

4. Podsumowanie

Wartości dolnych oszacowań LBC_{max} dla wierzchołków poziomu n - 1 odpowiadają terminom zakończenia wykonywania wszystkich wyrobów i równe są wartościom długości uszeregowania C_{max} dla kolejności określonej przez odpowiadające permutacje Π_i. Wyznaczenie uszeregowania optymalnego (zamiennie harmonogramu optymalnego) polega na ustaleniu takiej kolejności wykonywania wyrobów, aby zminimalizować termin zakończenia realizacji wszystkich wyrobów, tj. zminimalizować długość uszeregowania C_{max}. Metoda podziału i ograniczeń umożliwia przybliżone wyznaczenie harmonogramu optymalnego bez konieczności przeszukiwania wszystkich gałęzi drzewa uszeregowań. Jakość algorytmu metody podziału i ograniczeń zależy w istotny sposób od jakości oszacowania dolnego ograniczenia długości gałęzi zbioru możliwych uszeregowań, szczególnie przy wyborze gałęzi znajdujących się blisko korzenia drzewa uszeregowań częściowych (w początkowych krokach algorytmu).

LITERATURA

1. COFFMAN E. G. Jr. (red.): Teoria szeregowania zadań. WNT, Warszawa 1980
2. SAWIK T., Optymalizacja dyskretna w elastycznych systemach produkcyjnych. WNT, Warszawa 1992.
3. PAWLAK M.: Algorytmy ewolucyjne jako narzędzie harmonogramowania produkcji. Wydawnictwo PWN, Warszawa 1999
4. GRABOWSKI J., Nowicki E., Smutnicki Cz.: Metoda blokowa w zagadnieniach szeregowania zadań. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2003.
5. KNOSALA R., Kampa A.: Porównanie wybranych metod harmonogramowania produkcji. Zarządzanie Produkcją (1998), 3-4, 14-18.
6. KALINOWSKI K., KNOSALA R.: Harmonogramowanie produkcji w warunkach zakłóceń wspomagane system eksperckim. Zarządzanie Przedsiębiorstwem (2003) 1, 12-23.