

Paweł ROSNER<sup>1</sup>

## WYZNACZANIE NIEPEWNOŚCI POMIARU PROMIENIA OKRĘGU W TECHNICIE WSPÓLRZĘDNOŚCIOWEJ

**Streszczenie:** W artykule zaprezentowano opis algorytmu wyznaczania niepewności pomiaru promienia okręgu w przypadku pomiarów wykonywanych na współrzędnościowej maszynie pomiarowej. Przedstawione zostały wyniki obliczeń niepewności dla wybranej strategii próbkowania okręgu. Wykonane zostały analizy wpływu położenia i zorientowania okręgu w układzie współrzędnych na wartość niepewności.

**Słowa kluczowe:** niepewność pomiaru, współrzędnościowa technika pomiarowa

## EVALUATION OF UNCERTAINTY OF COORDINATE MEASUREMENT OF CIRCLE RADIUS

**Summary:** The paper presents a description of the algorithm for evaluation uncertainty of measurements of circle radius performed on a coordinate measuring machine. The results of evaluation of uncertainty for a given probing strategy of a circle are presented. The analysis of the impact of position and orientation of a circle (in the coordinate system) on measurement uncertainty was performed.

**Keywords:** measurement uncertainty, coordinate measuring technique

### 1. Wstęp

Niewątpliwie najlepszą metodą szacowania niepewności jest metoda eksperymentalna wykorzystująca wywzorcowany artefakt. Jednak aktualna wersja ISO 15530-3 [3] nadmiernie skupia się na rzadko spotykanych metodach pomiaru, które mogą mieć miejsce w laboratoriach wzorcujących. „Pomiar z podstawieniem” jest stosowany w pomiarach przedmiotów o prostej konstrukcji, gdzie dzięki dysponowaniu dokładnym przedmiotem wzorcowym można wykorzystać zaletę pomiaru różnicowego wynikającą z faktu, że współrzędnościowa maszyna pomiarowa (CMM) mierzy jedynie małe różnice między wyrobem a przedmiotem wzorcowym więc na niepewność pomiaru największy wpływ ma dokładność

---

<sup>1</sup> mgr inż., Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Katedra Technologii Maszyn i Automatykacji, Laboratorium Metrologii, prosner@ath.bielsko.pl

przedmiotu wzorcowego. Korygowanie błędu systematycznego w „pomiarze bez podstawienia” jest możliwe jeśli przedmiot jest mierzony zawsze dokładnie w tym samym miejscu przestrzeni CMM. Ponadto bez większego problemu korygować można jedynie wymiary. Korygowanie pozycji jest możliwe, ale wymaga zachowania ostrożności przy wykonywaniu obliczeń. Korekcja w przypadku innych charakterystyk jest praktycznie niemożliwa.

Tak więc procedury opisane w ISO 15530 [3] nie nadają się do zastosowań przemysłowych [7]. W warunkach przemysłowych możliwe jest wykorzystanie procedury z ISO 15530-3 [3] dotyczącej „pomiaru bez podstawienia”, jednak pod warunkiem że zostanie wyzorcowany jeden z produkowanych przedmiotów. Jedynie w takiej sytuacji możliwe jest wykonanie części eksperymentalnej procedury ponieważ w warunkach przemysłowych nie ma możliwości zmiany mocowania przedmiotu do pomiaru, ani nie jest możliwe wprowadzanie żadnych zmian w programie pomiarowym. Zgodnie z [3] obliczony „błąd systematyczny”  $b$  może być włączony do niepewności pomiaru przez dodanie jego bezwzględnej wartości do niepewności rozszerzonej. Możliwe są jeszcze co najmniej dwie możliwości włączenia „błędu systematycznego” do niepewności. Można przyjąć, że  $b$  ma rozkład dwuwartościowy i wtedy [5, 6]:

$$U = k \cdot \sqrt{u_{cal}^2 + u_p^2 + u_w^2 + b^2} \quad (1)$$

Można też nie obliczać  $b$  a zamiast tego obliczać  $u_p$  jako pierwiastek z drugiego momentu względem zera [9]:

$$u_p = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x_{cal})^2} \quad (2)$$

i wtedy

$$U = k \cdot \sqrt{u_{cal}^2 + u_p^2 + u_w^2} \quad (3)$$

Metodykę budowy modelu pomiaru współrzędnościowego służącego do szacowania niepewności pomiaru metodą analizy wrażliwości, wykorzystującego wyniki wzorcowania CMM oraz współrzędne minimalnej matematycznej liczby punktów niezbędnych do zdefiniowania danej charakterystyki, przedstawiono w pracach [8, 9].

Można zwrócić uwagę na trzy istotne zalety takiego podejścia do budowy modeli pomiaru. Pierwsza to spełnienie warunku, że model pomiaru powinien zawierać elementy wskazujące na zachowanie spójności pomiarowej, czyli uwypuklać podobieństwa modelu pomiaru i procedury wzorcowania CMM. Zarówno w modelu, jak i w czasie wzorcowania występuje pomiar długości dowolnie zorientowanego odcinka w obszarze roboczym CMM jako odległości pary punktów. Druga to fakt, że ten sposób modelowania wyjaśnia istotę pomiarów współrzędnościowych: każdą charakterystykę, zarówno wymiar, jak i odchyłkę geometryczną zdefiniowaną w dowolnym układzie baz daje się wyrazić jako funkcję odległości mierzonych wzdłuż osi układu współrzędnych między parami punktów (czyli różnic współrzędnych par punktów) a następnie postępując zgodnie z podejściem GUM utworzyć budżet niepewności pomiaru. Można też wskazywać na związek modelu

z budową klasycznej CMM. CMM rzeczywiście bezpośrednio mierzy odległości wzdłuż poszczególnych osi układów współrzędnych, a użyte do tego inkrementalne układy pomiarowe długości, należy traktować jak przyrządy ze zmiennym zerem (patrz [1]). Trzecią zaletą jest wykorzystanie informacji o aktualnej dokładności CMM zawartej w wynikach jej ostatniego wzorcowania i/lub we wzorze na największy dopuszczalny błąd pomiaru długości.

Model pomiaru powinien być oczywiście w pełni zgodny z zasadą pomiaru, budową przyrządu pomiarowego, itd., jednak nie zawsze bardziej złożone modele są lepsze od modeli znacznie uproszczonych. Na ten temat wypowiada się jednoznacznie dokument ([4], p. 3.10): „Nawet w przypadku jednego szczególnego rodzaju pomiaru może istnieć więcej niż jeden model”. Analizując modele wirtualne CMM można odnieść wrażenie, że cenione są jedynie bardzo złożone modele pomiaru współrzędnościowego. Nawet w ([2], p. 6.2) w odniesieniu do metody analizy wrażliwości znajduje się zdanie mówiące o tym, że z uwagi na to, że CMM są złożonymi przyrządami pomiarowymi, bezpośrednio wdrożenie tej techniki może być możliwe tylko w przypadku ograniczonej liczby zadań pomiarowych. Modele wirtualne CMM uwzględniające kinematykę (a bardziej zaawansowane również dynamikę, czy zmiany temperaturowe) nadają się znakomicie do badania propagacji błędów geometrycznych i są niezbędne w celu korekcji matematycznej. Z punktu widzenia użytkownika, CMM jest takim samym przyrządem jak suwmiarka czy czujnik, która po prostu spełnia wymagania określone przez producenta (lub użytkownika) wyrażone za pomocą wartości lub wzoru na  $MPE_E$  (w niektórych przypadkach dodatkowo innych dopuszczalnych błędów jak  $MPE_P$ ). Takie podejście jest równoznaczne z uznaniem, że wszystkie błędy systematyczne zostały skorygowane (przez producenta).

Istnieje metodyka szacowania niepewności pomiaru promienia okręgu na podstawie wzoru na promień okręgu opisanego na trójkącie  $R = abc/4S$ . W wariancie, w którym powierzchnia trójkąta  $S$  jest obliczana ze wzoru Herona, promień da się wyrazić w bardzo prostej postaci, jako funkcję wyłącznie długości boków trójkąta. O ile wszystkie charakterystyki geometryczne da się wyrazić jako funkcje różnic współrzędnych, to jest to jedyny przypadek, kiedy można bezpośrednio skorzystać z „długości”. Oczywiście, jeżeli powierzchnię trójkąta wyrazi się za pomocą współrzędnych wektorów, korzystając z interpretacji geometrycznej iloczynu wektorowego, to promień będzie funkcją różnic współrzędnych (składowych wektorów).

W literaturze znaleźć można metodykę i model szacowania niepewności pomiaru okręgu leżącego w płaszczyźnie, spełniające warunek, że mierzona wielkość da się wyrazić jako funkcję różnic współrzędnych punktów charakterystycznych. Celem niniejszej pracy jest pokazanie, że podobne podejście jest możliwe dla okręgu dowolnie usytuowanego w przestrzeni i porównanie uzyskanych wyników.

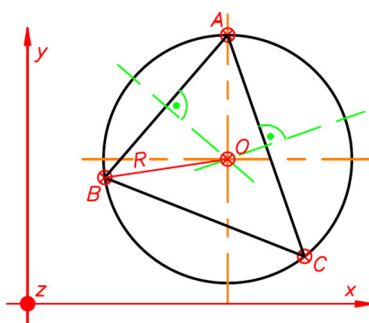
Wszystkie podane poniżej wyniki szacowania niepewności pomiaru promienia mogą być wykorzystane na dwa sposoby:

- do analizy wpływu rozmieszczenia punktów próbkowania zarówno w pomiarze promienia całego okręgu, jak i w pomiarze promienia łuku okręgu,

- przyjmując, że w pomiarze okręgu stosuje się równomierne rozmieszczenie punktów próbkowania wyniki mogą być rozumiane jako oszacowanie od góry niepewności pomiaru promienia, niezależnie od liczby punktów próbkowania.

## 2. Algorytm

Środek okręgu  $O$  zostanie wyznaczony jako punkt przecięcia płaszczyzny  $ABC$  i płaszczyzn symetrycznych dwóch boków. Możliwe jest wykorzystanie par boków  $AB$  i  $AC$ ,  $BA$  i  $BC$  lub  $CA$  i  $CB$  (rys. 1).



Rysunek 1. Model pomiaru współrzędnościowego promienia okręgu (przykład dla okręgu leżącego w płaszczyźnie  $xy$ )

Wcześniejsze analizy wykazały, że w każdym z trzech wymienionych przypadków otrzymuje się różne oszacowania niepewności pomiaru i jako właściwe należy wybierać najlepsze z nich. Poniżej zostaną przedstawione obliczenia dla przypadku użycia boków  $AB$  i  $BC$ . Do obliczeń użyto równania parametryczne płaszczyzn w postaci

$$x = x_0 + su_1 + tv_1 \quad (4)$$

$$y = y_0 + su_2 + tv_2 \quad (5)$$

$$z = z_0 + su_3 + tv_3 \quad (6)$$

gdzie:  $u_i, v_i$  – dowolne wektory równoległe do płaszczyzny,  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  – dowolny punkt płaszczyzny.

Równanie płaszczyzny  $ABC$  zdefiniowano następująco.  $P_0$  to  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $u$  to  $AB(ab_1, ab_2, ab_3)$ ,  $v$  to  $AC(ac_1, ac_2, ac_3)$  (w dalszej części będą omówione jeszcze dwa przypadki:  $P_0 = B, u = BA, v = BC$  i  $P_0 = C, u = CA, v = CB$ ):

$$x = a_1 + s_1 ab_1 + t_1 ac_1 \quad (7)$$

$$y = a_2 + s_1 ab_2 + t_1 ac_2 \quad (8)$$

$$z = a_3 + s_1 ab_3 + t_1 ac_3 \quad (9)$$

Równanie płaszczyzny symetralnej odcinka  $AB$  można zdefiniować następująco.  $P_0$  to środek odcinka  $AB$ ,  $u$  i  $v$  to dowolne, wzajemnie prostopadłe wektory, których iloczyn wektorowy jest wektorem  $AB$  (lub równoległym do  $AB$ ).

$$x = \frac{a_1+b_1}{2} + s_2 u_{1AB} + t_2 v_{1AB} \quad (10)$$

$$y = \frac{a_2+b_2}{2} + s_2 u_{2AB} + t_2 v_{2AB} \quad (11)$$

$$z = \frac{a_3+b_3}{2} + s_2 u_{3AB} + t_2 v_{3AB} \quad (12)$$

Dla  $u$  można przyjąć dwie składowe jako dane (np. obie równe 1, ale oczywiście obie różne od zera). Konieczne jest przyjęcie tych składowych wektora  $u$  jako dane różne od zera, dla których składowa wektora  $AB$  jest równa lub bliska 0.

W przypadku, kiedy  $AB$  jest równoległe (lub prawie równoległe) do  $x$  to jako dane różne od zera muszą być przyjęte składowe  $u_{2AB}$  i  $u_{3AB}$ . W przypadku, kiedy  $AB$  jest równoległe (lub prawie równoległe) do  $y$  to jako dane różne od zera muszą być przyjęte składowe  $u_{1AB}$  i  $u_{3AB}$ . W przypadku, kiedy  $AB$  jest równoległe (lub prawie równoległe) do  $z$  to jako dane różne od zera muszą być przyjęte składowe  $u_{1AB}$  i  $u_{2AB}$ .

Trzecią składową wektora  $u$  oblicza się z warunku prostopadłości do wektora  $AB$ , czyli z warunku, że iloczyn skalarny wektorów  $u$  i  $AB$  jest równy 0.

$$ab_1 u_{1AB} + ab_2 u_{2AB} + ab_3 u_{3AB} = 0 \quad (13)$$

Jeśli przyjęto  $u_{2AB} = 1$  i  $u_{3AB} = 1$  to składową  $u_{1AB}$  oblicza się według wzoru

$$u_{1AB} = -\frac{ab_2 u_{2AB} + ab_3 u_{3AB}}{ab_1} \quad (14)$$

Jeśli przyjęto  $u_{1AB} = 1$  i  $u_{3AB} = 1$  to składową  $u_{2AB}$  oblicza się według wzoru

$$u_{2AB} = -\frac{ab_1 u_{1AB} + ab_3 u_{3AB}}{ab_2} \quad (15)$$

Jeśli przyjęto  $u_{1AB} = 1$  i  $u_{2AB} = 1$  to składową  $u_{3AB}$  oblicza się według wzoru

$$u_{3AB} = -\frac{ab_1 u_{1AB} + ab_2 u_{2AB}}{ab_3} \quad (16)$$

Żeby uwolnić się od rozmytego stwierdzenia „prawie równoległe”, bezpieczne będzie obliczanie tej składowej wektora  $u$  dla której składowa wektora  $AB$  jest największa, a przyjmowanie jako równych jedności pozostałych dwóch składowych.

Wektor  $v$  można obliczyć jako iloczyn wektorowy  $u$  i  $AB$

$$v = u \times AB = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_{1AB} & u_{2AB} & u_{3AB} \\ ab_1 & ab_2 & ab_3 \end{vmatrix} \quad (17)$$

czyli

$$v_{1AB} = u_{2AB}ab_3 - u_{3AB}ab_2 \quad (18)$$

$$v_{2AB} = u_{3AB}ab_1 - u_{1AB}ab_3 \quad (19)$$

$$v_{3AB} = u_{1AB}ab_2 - u_{2AB}ab_1 \quad (20)$$

Równanie płaszczyzny symetralnej odcinka  $AC$  można zdefiniować analogicznie do przypadku płaszczyzny symetralnej do  $AB$ .  $P_0$  to jego środek,  $u$  i  $v$  to jakiegokolwiek, wzajemnie prostopadłe wektory, których iloczyn wektorowy jest wektorem  $AC$ .

Jeśli  $AC$  jest równoległe (lub prawie równoległe) do  $x$  to należy przyjąć  $u_{2AC} = 1$  i  $u_{3AC} = 1$  a  $u_{1AC}$  obliczyć według wzoru:

$$u_{1AC} = -\frac{ac_2u_{2AC} + ac_3u_{3AC}}{ac_1} \quad (21)$$

Jeśli  $AC$  jest równoległe (lub prawie równoległe) do  $y$  to należy przyjąć  $u_{1AC} = 1$  i  $u_{3AC} = 1$  a  $u_{2AC}$  obliczyć według wzoru:

$$u_{2AC} = -\frac{ac_1u_{1AC} + ac_3u_{3AC}}{ac_2} \quad (22)$$

Jeśli  $AC$  jest równoległe (lub prawie równoległe) do  $z$  to należy przyjąć  $u_{1AC} = 1$  i  $u_{2AC} = 1$  a  $u_{3AC}$  obliczyć według wzoru:

$$u_{3AC} = -\frac{ac_1u_{1AC} + ac_2u_{2AC}}{ac_3} \quad (23)$$

Żeby uwolnić się od rozmytego stwierdzenia „prawie równoległe”, należy obliczać tę składową wektora  $u_{iAC}$  dla której składowa wektora  $AC$  jest największa, a przyjmować jako równe jedności pozostałe dwie składowe.

Następnie otrzymuje się równanie płaszczyzny:

$$x = \frac{a_1 + c_1}{2} + s_3u_{1AC} + t_3v_{1AC} \quad (24)$$

$$y = \frac{a_2 + c_2}{2} + s_3u_{2AC} + t_3v_{2AC} \quad (25)$$

$$z = \frac{a_3 + c_3}{2} + s_3u_{3AC} + t_3v_{3AC} \quad (26)$$

gdzie

$$v = u \times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_{1AC} & u_{2AC} & u_{3AC} \\ ac_1 & ac_2 & ac_3 \end{vmatrix} \quad (27)$$

czyli

$$v_{1AC} = u_{2AC}ac_3 - u_{3AC}ac_2 \quad (28)$$

$$v_{2AC} = u_{3AC}ac_1 - u_{1AC}ac_3 \quad (29)$$

$$v_{3AC} = u_{1AC}ac_2 - u_{2AC}ac_1 \quad (30)$$

Poniższe obliczenia dotyczą tylko przypadku gdy  $u_{2AB}$ ,  $u_{3AB}$ ,  $u_{2AC}$  i  $u_{3AC}$  są równe 1, a  $u_{IAB}$  i  $u_{IAC}$  są obliczane

Po wstawieniu do (10), (11), (12)  $u_{IAB}$  obliczane wg (14), a pozostałe równe 1 otrzymuje się:

$$x = \frac{a_1+b_1}{2} + s_2 \left( -\frac{ab_2u_{2AB}+ab_3u_{3AB}}{ab_1} \right) + t_2(u_{2AB}ab_3 - u_{3AB}ab_2) \quad (31)$$

$$y = \frac{a_2+b_2}{2} + s_2u_{2AB} + t_2 \left( u_{3AB}ab_1 - \left( -\frac{ab_2u_{2AB}+ab_3u_{3AB}}{ab_1} \right) ab_3 \right) \quad (32)$$

$$z = \frac{a_3+b_3}{2} + s_2u_{3AB} + t_2 \left( \left( -\frac{ab_2u_{2AB}+ab_3u_{3AB}}{ab_1} \right) ab_2 - u_{2AB}ab_1 \right) \quad (33)$$

Po wstawieniu do (24), (25), (26)  $u_{IAC}$  obliczane wg (14), a pozostałe równe 1 otrzymuje się:

$$x = \frac{a_1+c_1}{2} + s_3 \left( -\frac{ac_2u_{2AC}+ac_3u_{3AC}}{ac_1} \right) + t_3(u_{2AC}ac_3 - u_{3AC}ac_2) \quad (34)$$

$$y = \frac{a_2+c_2}{2} + s_3u_{2AC} + t_3 \left( u_{3AC}ac_1 - \left( -\frac{ac_2u_{2AC}+ac_3u_{3AC}}{ac_1} \right) ac_3 \right) \quad (35)$$

$$z = \frac{a_3+c_3}{2} + s_3u_{3AC} + t_3 \left( \left( -\frac{ac_2u_{2AC}+ac_3u_{3AC}}{ac_1} \right) ac_2 - u_{2AC}ac_1 \right) \quad (36)$$

Rozwiązanie układu 9 równań: (7) – (9), (31) – (36) z niewiadomymi  $s_1$ ,  $t_1$ ,  $s_2$ ,  $t_2$ ,  $s_3$ ,  $t_3$ ,  $x$ ,  $y$  i  $z$  można rozpocząć od wyeliminowania  $x$ ,  $y$  i  $z$ .

Przyrównując równania (7) – (9) odpowiednio do (31) – (33) i do (34) – (36) otrzymuje się następujące równania:

$$a_1 + s_1ab_1 + t_1ac_1 = \frac{a_1+b_1}{2} - s_2 \left( \frac{ab_2u_{2AB}+ab_3u_{3AB}}{ab_1} \right) + t_2(u_{2AB}ab_3 - u_{3AB}ab_2) \quad (37)$$

$$a_2 + s_1ab_2 + t_1ac_2 = \frac{a_2+b_2}{2} + s_2u_{2AB} + t_2 \left( u_{3AB}ab_1 + \left( \frac{ab_2u_{2AB}+ab_3u_{3AB}}{ab_1} \right) ab_3 \right) - \quad (38)$$

$$a_3 + s_1ab_3 + t_1ac_3 = \frac{a_3+b_3}{2} + s_2u_{3AB} - t_2 \left( \left( \frac{ab_2u_{2AB}+ab_3u_{3AB}}{ab_1} \right) ab_2 + u_{2AB}ab_1 \right) \quad (39)$$

$$a_1 + s_1ab_1 + t_1ac_1 = \frac{a_1+c_1}{2} - s_3 \left( \frac{ac_2u_{2AC}+ac_3u_{3AC}}{ac_1} \right) + t_3(u_{2AC}ac_3 - u_{3AC}ac_2) \quad (40)$$

$$a_2 + s_1 ab_2 + t_1 ac_2 = \frac{a_2 + c_2}{2} + s_3 u_{2AC} + t_3 \left( u_{3AC} ac_1 + \left( \frac{ac_2 u_{2AC} + ac_3 u_{3AC}}{ac_1} \right) ac_3 \right) \quad (41)$$

$$a_3 + s_1 ab_3 + t_1 ac_3 = \frac{a_3 + c_3}{2} + s_3 u_{3AC} - t_3 \left( \left( \frac{ac_2 u_{2AC} + ac_3 u_{3AC}}{ac_1} \right) ac_2 + u_{2AC} ac_1 \right) \quad (42)$$

Po uporządkowaniu i (ważne) po zastąpieniu różnic  $b_i - a_i$ ,  $c_i - a_i$  oraz  $c_i - b_i$  odpowiednio przez  $ab_i$ ,  $ac_i$  i  $bc_i$  otrzymuje się:

$$s_1 ab_1 + t_1 ac_1 + s_2 \left( \frac{ab_2 u_{2AB} + ab_3 u_{3AB}}{ab_1} \right) - t_2 (u_{2AB} ab_3 - u_{3AB} ab_2) = \frac{ab_1}{2} \quad (43)$$

$$s_1 ab_2 + t_1 ac_2 - s_2 u_{2AB} - t_2 \left( u_{3AB} ab_1 + \left( \frac{ab_2 u_{2AB} + ab_3 u_{3AB}}{ab_1} \right) ab_3 \right) = \frac{ab_2}{2} \quad (44)$$

$$s_1 ab_3 + t_1 ac_3 - s_2 u_{3AB} + t_2 \left( \left( \frac{ab_2 u_{2AB} + ab_3 u_{3AB}}{ab_1} \right) ab_2 + u_{2AB} ab_1 \right) = \frac{ab_3}{2} \quad (45)$$

$$s_1 ab_1 + t_1 ac_1 + s_3 \left( \frac{ac_2 u_{2AC} + ac_3 u_{3AC}}{ac_1} \right) - t_3 (u_{2AC} ac_3 - u_{3AC} ac_2) = \frac{ac_1}{2} \quad (46)$$

$$s_1 ab_2 + t_1 ac_2 - s_3 u_{2AC} - t_3 \left( u_{3AC} ac_1 + \left( \frac{ac_2 u_{2AC} + ac_3 u_{3AC}}{ac_1} \right) ac_3 \right) = \frac{ac_2}{2} \quad (47)$$

$$s_1 ab_3 + t_1 ac_3 - s_3 u_{3AC} + t_3 \left( \left( \frac{ac_2 u_{2AC} + ac_3 u_{3AC}}{ac_1} \right) ac_2 + u_{2AC} ac_1 \right) = \frac{ac_3}{2} \quad (48)$$

Układ równań (liniowych) rozwiązano na wielkościach ogólnych w Maple po uprzednim przedstawieniu go w zapisie macierzowym:

$$Lx = b \quad (49)$$

Wektor niewiadomych ma postać

$$x = [s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3] \quad (50)$$

Pozostałe elementy równania macierzowego (49) są następujące:

$$b = [ab_1/2, ac_1/2, ab_2/2, ac_2/2, ab_3/2, ac_3/2] \quad (51)$$

$$L = \begin{bmatrix} ab_1 & ac_1 & L_{13} & L_{14} & 0 & 0 \\ ab_1 & ac_1 & 0 & 0 & L_{25} & L_{26} \\ ab_2 & ac_2 & -u_{2AB} & L_{34} & 0 & 0 \\ ab_2 & ac_2 & 0 & 0 & -u_{2AC} & L_{46} \\ ab_3 & ac_3 & -u_{3AB} & L_{54} & 0 & 0 \\ ab_3 & ac_3 & 0 & 0 & -u_{3AC} & L_{66} \end{bmatrix} \quad (52)$$



gdzie:

$$L_{13} = \frac{ab_2u_{2AB} + ab_3u_{3AB}}{ab_1} \quad (53)$$

$$L_{14} = -u_{2AB}ab_3 + u_{3AB}ab_2 \quad (54)$$

$$L_{25} = \frac{ac_2u_{2AC} + ac_3u_{3AC}}{ac_1} \quad (55)$$

$$L_{26} = -u_{2AC}ac_3 + u_{3AC}ac_2 \quad (56)$$

$$L_{34} = -u_{3AB}ab_1 - \left( \frac{ab_2u_{2AB} + ab_3u_{3AB}}{ab_1} \right) ab_3 \quad (57)$$

$$L_{46} = -u_{3AC}ac_1 - \left( \frac{ac_2u_{2AC} + ac_3u_{3AC}}{ac_1} \right) ac_3 \quad (58)$$

$$L_{54} = \left( \frac{ab_2u_{2AB} + ab_3u_{3AB}}{ab_1} \right) ab_2 + u_{2AB}ab_1 \quad (59)$$

$$L_{66} = \left( \frac{ac_2u_{2AC} + ac_3u_{3AC}}{ac_1} \right) ac_2 + u_{2AC}ac_1 \quad (60)$$

Po rozwiązaniu układu równań (znając  $s_i$  i  $t_i$ ) można z równań (7) – (9) obliczyć współrzędne środka okręgu  $O(x_O, y_O, z_O)$  i następnie  $R$  jako odległość dowolnego punktu A od środka O.

$$R = \sqrt{(a_1 - o_1)^2 + (a_2 - o_2)^2 + (a_3 - o_3)^2} \quad (61)$$

Po drobnych przekształceniach otrzymuje się następujące wzory na elementy wzoru (61) na promień:

$$a_1 - o_1 = -(s_1ab_1 + t_1ac_1) \quad (62)$$

$$a_2 - o_2 = -(s_1ab_2 + t_1ac_2) \quad (63)$$

$$a_3 - o_3 = -(s_1ab_3 + t_1ac_3) \quad (64)$$

Dzięki tym przekształceniom  $R$  jest funkcją wyłącznie różnic współrzędnych (we wzorze nie może być współrzędnych punktów).

Do budowy budżetu niepewności potrzebne jest obliczenie pochodnych cząstkowych promienia  $R$  po poszczególnych różnicach współrzędnych

### 3. Wyrażenie parametrów okręgu jako funkcji współrzędnych

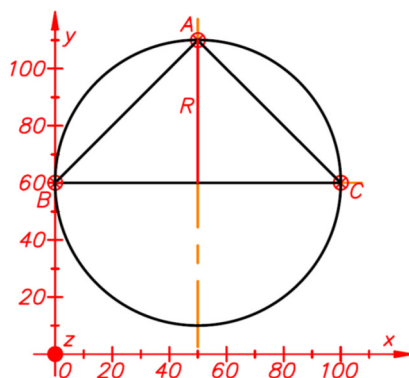
Jak wspomniano we wstępie, naturalnym modelem pomiarów współrzędnościowych jest wyrażenie mierzonych charakterystyk w funkcji różnic współrzędnych. Użycie jako wielkości wejściowych współrzędnych punktów jest nienaturalne ponieważ dla tego samego zadania wielkości wejściowe istotnie zmieniają się w zależności od położenia i orientacji układu współrzędnych. W niniejszym rozdziale wykonano analizę możliwości wykorzystania modeli wykorzystujących współrzędne. Przyjęto wstępnie, że odpowiednie będzie takie przyjęcie układu, dla którego obliczona w taki sposób wartość niepewności pomiaru jest najmniejsza z możliwych.

## 4. Przykłady

### 4.1. Przykład 1 Dwa punkty na średnicy wzdłuż osi $x$

Dla danych  $A = (50, 110, 40)$ ,  $B = (0, 60, 40)$ ,  $C = (100, 60, 40)$  (rys. 2) oraz dla CMM o  $MPE = 2+4L/1000$  i współczynnika  $\lambda = 3$  (algorytm obliczania wartości współczynnika znajduje się w [10]) otrzymuje się  $s_1 = \frac{1}{2}$ ;  $t_1 = 0$ ;  $s_2 = 0$ ;  $t_2 = 0$ ;  $s_3 = -\frac{40}{33}$ ;  $t_3 = \frac{5}{66}$ , środek  $O(50, 60, 40)$  i promień  $R = 50$ .

Budżet niepewności dla modelu wykorzystującego wektory  $AB$  i  $AC$  przedstawiono w tabeli 1, dla modelu wykorzystującego wektory  $BA$  i  $BC$  – w tabeli 2, a dla modelu wykorzystującego wektory  $CA$  i  $CB$  – w tabeli 3.



Rysunek 2. Model pomiaru współrzędnościowego promienia okręgu (przykład dla okręgu leżącego w płaszczyźnie  $xy$  i z punktami  $B$  i  $C$  wyznaczającymi średnicę)

Tabela 1. Budżet niepewności pomiaru promienia okręgu dla modelu wykorzystującego wektory  $AB$  i  $AC$  oraz rozmieszczenia punktów wg rys. 2

Składnik	$x_i$ , mm	$\partial R / \partial x_i$	$u_i$ , $\mu\text{m}$	$\partial R / \partial x_i \cdot u_i$ , $\mu\text{m}$
$ab_1$	-50	-0,5	0,73	-0,37
$ab_2$	-50	0	0,73	0
$ab_3$	0	0	0,67	0
$ac_1$	50	0,5	0,73	0,37
$ac_2$	-50	0	0,73	0
$ac_3$	0	0	0,67	0
$u =$				0,52

Tabela 2. Budżet niepewności pomiaru promienia okręgu dla modelu wykorzystującego wektory  $BA$  i  $BC$  oraz rozmieszczenia punktów wg rys. 2

Składnik	$x_i$ , mm	$\partial R/\partial x_i$	$u_i$ , $\mu\text{m}$	$\partial R/\partial x_i \cdot u_i$ , $\mu\text{m}$
$bc_1$	100	0,50	0,80	0,40
$bc_2$	0	0	0,67	0
$bc_3$	0	0	0,67	0
$ba_1$	50	0	0,73	0
$ba_2$	50	0	0,73	0
$ba_3$	0	0	0,67	0
			$u =$	0,40

Tabela 3. Budżet niepewności pomiaru promienia okręgu dla modelu wykorzystującego wektory  $CA$  i  $CB$  dla rozmieszczenia punktów wg rys. 2

Składnik	$x_i$ , mm	$\partial R/\partial x_i$	$u_i$ , $\mu\text{m}$	$\partial R/\partial x_i \cdot u_i$ , $\mu\text{m}$
$ca_1$	-50	0	0,73	0
$ca_2$	50	0	0,73	0
$ca_3$	0	0	0,67	0
$cb_1$	-100	-0,50	0,80	-0,40
$cb_2$	0	0	0,67	0
$cb_3$	0	0	0,67	0
			$u =$	0,40

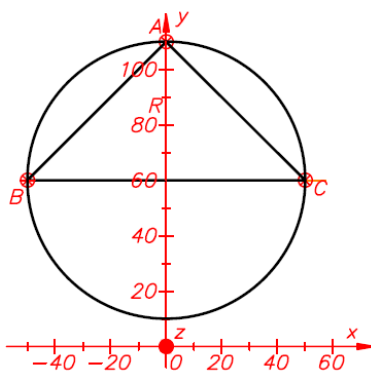
W przedstawionym przykładzie najmniejsza wartość niepewności (0,4  $\mu\text{m}$ ) występuje dla modelu wykorzystującego wektory  $BA$  i  $BC$  oraz wektory  $CA$  i  $CB$  i jako właściwy budżet należy przyjąć ten z tabeli 2 lub 3. Należy zauważyć, że jedyny niezerowy składnik niepewności jest w obu przypadkach związany ze składową  $bc_1$ . Wynika to z faktu, że wyznaczające średnicę punkty  $B$  i  $C$  leżą na prostej równoległej do osi  $x$ . Obliczenia dla modelu przedstawiającego parametry okręgu w funkcji współrzędnych.

W przypadku, kiedy parametry okręgu są wyrażone jako funkcje współrzędnych punktów można wykonać analizy dla wszystkich parametrów okręgu, tzn. promienia i współrzędnych środka. Obliczone pochodne zostaną przedstawione w postaci jacobianu. Jakobiany przedstawiono w tabeli 4.

Tabela 4. Pochodne cząstkowe (jacobian) dla współrzędnych środka i promienia okręgu potraktowanych jako funkcje współrzędnych punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$ , dla rozmieszczenia punktów według rys. 2.

$x$	$\frac{\partial xs}{\partial x}$	$\frac{\partial ys}{\partial x}$	$\frac{\partial zs}{\partial x}$	$\frac{\partial R}{\partial x}$
$a_1$	0	0	0	0
$a_2$	0	1	0	0
$a_3$	0	0	0	0
$b_1$	0,5	0,5	0	-0,5
$b_2$	0	0	0	0
$b_3$	0	0	0,5	0
$c_1$	0,5	-0,5	0	0,5
$c_2$	0	0	0	0
$c_3$	0	0	0,5	0

Budżety niepewności zostaną wykonane jedynie dla promienia. Okazuje się, że na niepewność pomiaru ma wpływ położenie układu współrzędnych względem okręgu. Dla przypadku rozmieszczenia punktów jak na rys. 2, najmniejsza wartość niepewności pomiaru promienia ma miejsce, kiedy współrzędna  $x$  środka okręgu wynosi 0 (rys. 3).



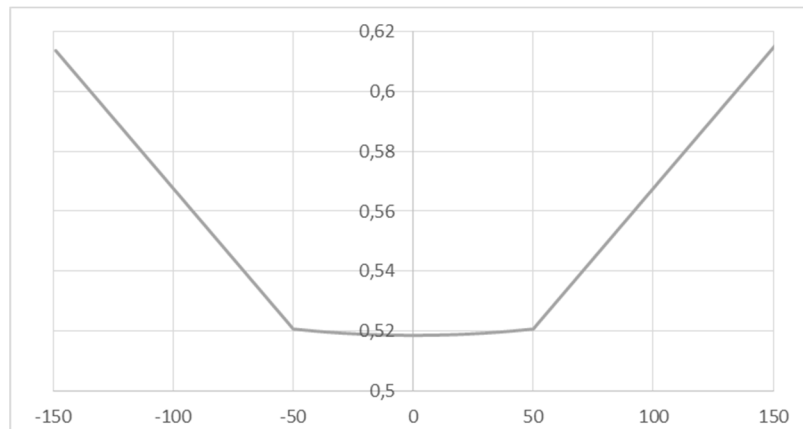
Rysunek 3. Usytuowanie okręgu względem układu współrzędnych dla którego otrzymuje się najmniejszą wartość niepewności pomiaru promienia

Budżet niepewności dla takiego przypadku przedstawiono w tabeli 5.

Tabela 5. Budżet niepewności pomiaru promienia okręgu, w którym promień jest wyrażony w postaci funkcji współrzędnych punktów oraz dla rozmieszczenia punktów wg rys. 3

Składnik	$x_i$ , mm	$\partial R/\partial x_i$	$u_i$ , $\mu\text{m}$	$\partial R/\partial x_i \cdot u_i$ , $\mu\text{m}$
$a_1$	0	0	0,67	0
$a_2$	110	0	0,81	0
$a_3$	40	0	0,72	0
$b_1$	-50	-0,5	0,73	-0,37
$b_2$	60	0	0,75	0
$b_3$	40	0	0,72	0
$c_1$	50	0,5	0,73	0,37
$c_2$	60	0	0,75	0
$c_3$	40	0	0,72	0
$u =$				0,52

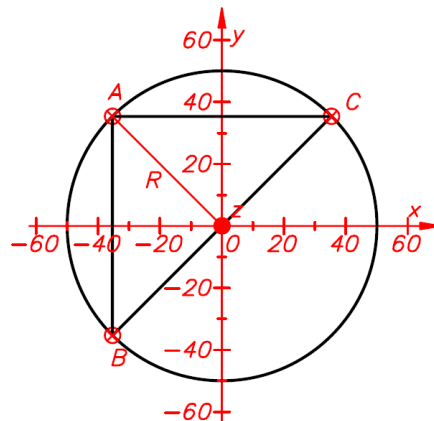
Zmiana położenia układu współrzędnych od tego miejsca wzdłuż osi  $x$ , w obrębie odcinka  $AB$  wywołuje nieznaczne zmiany obliczanych wartości niepewności, natomiast po wyjściu poza ten odcinek obliczone wartości rosną (rys. 4).



Rysunek 4. Wpływ zmiany położenia układu współrzędnych wzdłuż osi  $x$  względem okręgu

Przy przesuwaniu układu wzdłuż osi  $y$ , jak również wzdłuż osi  $z$  nie obserwuje się zmian obliczanych wartości. Z wykonanej analizy wynika, że budżety niepewności dla modeli w których promień jest wyrażony w funkcji współrzędnych należy sporządzać dla przypadku gdy okrąg leży w płaszczyźnie układu współrzędnych, a początek układu jest w środku okręgu.

#### 4.2. Przykład 2 Dwa punkty na średnicy – wpływ obrotu wokół osi $z$ układu współrzędnych



Rysunek 5. Model pomiaru współrzędnościowego promienia okręgu (przykład dla okręgu leżącego w płaszczyźnie  $xy$  i z punktami  $B$  i  $C$  wyznaczającymi średnicę)

Budżet niepewności dla modelu wykorzystującego wektory  $AB$  i  $AC$  przedstawiono w tabeli 6, dla modelu wykorzystującego wektory  $BA$  i  $BC$  – w tabeli 7, a dla modelu wykorzystującego wektory  $CA$  i  $CB$  – w tabeli 8.

Tabela 6. Budżet niepewności pomiaru promienia okręgu dla modelu wykorzystującego wektory  $AB$  i  $AC$  oraz rozmieszczenia punktów wg rys. 5

Składnik	$x_i$ , mm	$\partial R/\partial x_i$	$u_i$ , $\mu\text{m}$	$\partial R/\partial x_i \cdot u_i$ , $\mu\text{m}$
$ab_1$	0	-0,35	0,67	-0,24
$ab_2$	-70,7	-0,35	0,76	-0,27
$ab_3$	0	0	0,67	0
$ac_1$	70,7	0,35	0,76	0,27
$ac_2$	0	0,35	0,67	0,24
$ac_3$	0	0	0,67	0
$u =$				0,51

Tabela 7. Budżet niepewności pomiaru promienia okręgu dla modelu wykorzystującego wektory  $BA$  i  $BC$  oraz rozmieszczenia punktów wg rys. 5

Składnik	$x_i$ , mm	$\partial R/\partial x_i$	$u_i$ , $\mu\text{m}$	$\partial R/\partial x_i \cdot u_i$ , $\mu\text{m}$
$bc_1$	70,7	0,35	0,76	0,27
$bc_2$	70,7	0,35	0,76	0,27
$bc_3$	0	0	0,67	0
$ba_1$	0	0	0,67	0
$ba_2$	70,7	0	0,76	0
$ba_3$	0	0	0,67	0
$u =$				0,38

Tabela 8. Budżet niepewności pomiaru promienia okręgu dla modelu wykorzystującego wektory  $CA$  i  $CB$  dla rozmieszczenia punktów wg rys. 5

Składnik	$x_i$ , mm	$\partial R/\partial x_i$	$u_i$ , $\mu\text{m}$	$\partial R/\partial x_i \cdot u_i$ , $\mu\text{m}$
$ca_1$	-70,7	0	0,76	0
$ca_2$	0	0	0,67	0
$ca_3$	0	0	0,67	0
$cb_1$	-70,7	-0,35	0,76	-0,27
$cb_2$	-70,7	-0,35	0,76	-0,27
$cb_3$	0	0	0,67	0
$u =$				0,38

W przedstawionym przykładzie najmniejsza wartość niepewności (0,38  $\mu\text{m}$ ) występuje dla modelu wykorzystującego wektory  $BA$  i  $BC$  oraz wektory  $CA$  i  $CB$  i jako właściwy budżet należy przyjąć ten z tabeli 7 lub 8. Można uznać, że wpływ obrotu jest znikomy.

Obliczenia dla modelu przedstawiającego parametry okręgu w funkcji współrzędnych.

W przypadku, kiedy parametry okręgu są wyrażone jako funkcje współrzędnych punktów można wykonać analizy dla wszystkich parametrów okręgu, tzn. promienia i współrzędnych środka. Obliczone pochodne zostaną przedstawione w postaci jakobianu.

Jakobian przedstawiono w tabeli 9.

Tabela 9. Pochodne cząstkowe (jakobian) dla współrzędnych środka i promienia okręgu potraktowanych jako funkcje współrzędnych punktów A, B i C, dla rozmieszczenia punktów według rys. 5.

$x$	$\frac{\partial xs}{\partial x}$	$\frac{\partial ys}{\partial x}$	$\frac{\partial zs}{\partial x}$	$\frac{\partial R}{\partial x}$
$a_1$	0,5	-0,5	0	0
$a_2$	-0,5	0,5	0	0
$a_3$	0	0	0	0
$b_1$	0	0,5	0	-0,35
$b_2$	0	0,5	0	-0,35
$b_3$	0	0	0,5	0
$c_1$	0,5	0	0	0,35
$c_2$	0,5	0	0	0,35
$c_3$	0	0	0,5	0

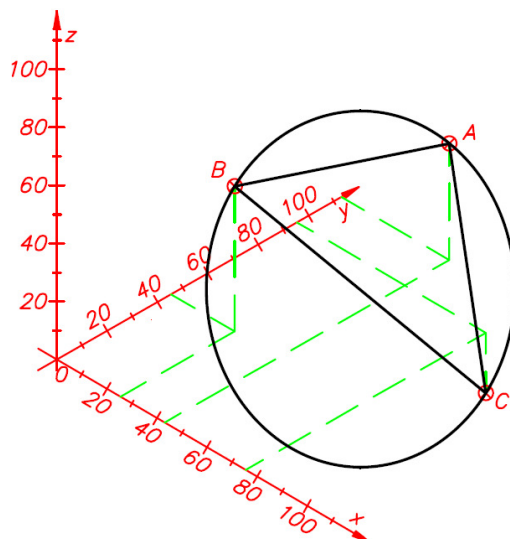
Budżet niepewności zostanie wykonany jedynie dla promienia, przedstawiony został w tabeli 10.

Tabela 10. Budżet niepewności pomiaru promienia okręgu, w którym promień jest wyrażony w postaci funkcji współrzędnych punktów oraz dla rozmieszczenia punktów wg rys. 5

Składnik	$x_i$ , mm	$\partial R/\partial x_i$	$u_i$ , $\mu\text{m}$	$\partial R/\partial x_i \cdot u_i$ , $\mu\text{m}$
$a_1$	-35,3553	0	0,71	0
$a_2$	35,3553	0	0,71	0
$a_3$	40	0	0,72	0
$b_1$	-35,3553	-0,35	0,71	-0,25
$b_2$	-35,3553	-0,35	0,71	-0,25
$b_3$	40	0	0,72	0
$c_1$	35,3553	0,35	0,71	0,25
$c_2$	35,3553	0,35	0,71	0,25
$c_3$	40	0	0,72	0
			$u =$	0,50

Nie ma wpływu obrót układu współrzędnych – przy innej orientacji wynik był podobny (0,52  $\mu\text{m}$ )

### 4.3. Przykład 3 Dwa punkty na średnicy – wpływ obrotu w przestrzeni względem układu współrzędnych



Rysunek 6. Model pomiaru współrzędnościowego promienia okręgu (przykład dla okręgu leżącego w płaszczyźnie wyraźnie odchylonej od płaszczyzn układu współrzędnych)

Budżet niepewności dla modelu wykorzystującego wektory  $AB$  i  $AC$  przedstawiono w tabeli 11, dla modelu wykorzystującego wektory  $BA$  i  $BC$  – w tabeli 12, a dla modelu wykorzystującego wektory  $CA$  i  $CB$  – w tabeli 13.

Tabela 11. Budżet niepewności pomiaru promienia okręgu dla modelu wykorzystującego wektory  $AB$  i  $AC$  oraz rozmieszczenia punktów wg rys. 6

Składnik	$x_i$ , mm	$\partial R/\partial x_i$	$u_i$ , $\mu\text{m}$	$\partial R/\partial x_i \cdot u_i$ , $\mu\text{m}$
$ab_1$	-17,68	-0,25	0,69	-0,17
$ab_2$	-67,68	-0,25	0,76	-0,19
$ab_3$	10,36	0,35	0,68	0,24
$ac_1$	32,32	0,25	0,71	0,18
$ac_2$	-17,68	0,25	0,69	0,17
$ac_3$	-60,36	-0,35	0,75	-0,26
			$u =$	0,50



Tabela 12. Budżet niepewności pomiaru promienia okręgu dla modelu wykorzystującego wektory BA i BC oraz rozmieszczenia punktów wg rys. 6

Składnik	$x_i$ , mm	$\partial R/\partial x_i$	$u_i$ , $\mu\text{m}$	$\partial R/\partial x_i \cdot u_i$ , $\mu\text{m}$
$bc_1$	50	0,25	0,73	0,18
$bc_2$	50	0,25	0,73	0,18
$bc_3$	-70,71	-0,35	0,76	-0,27
$ba_1$	17,68	0	0,69	0
$ba_2$	67,68	0	0,76	0
$ba_3$	-10,36	0	0,68	0
$u =$				0,37

Tabela 13. Budżet niepewności pomiaru promienia okręgu dla modelu wykorzystującego wektory CA i CB dla rozmieszczenia punktów wg rys. 6

Składnik	$x_i$ , mm	$\partial R/\partial x_i$	$u_i$ , $\mu\text{m}$	$\partial R/\partial x_i \cdot u_i$ , $\mu\text{m}$
$ca_1$	-32,32	0	0,71	0
$ca_2$	17,68	0	0,69	0
$ca_3$	60,36	0	0,75	0
$cb_1$	-50	-0,25	0,73	-0,18
$cb_2$	-50	-0,25	0,73	-0,18
$cb_3$	70,71	0,35	0,76	0,27
$u =$				0,37

W przedstawionym przykładzie najmniejsza wartość niepewności (0,37  $\mu\text{m}$ ) występuje dla modelu wykorzystującego wektory BA i BC oraz wektory CA i CB i jako właściwy budżet należy przyjąć ten z tablicy 12 lub 13. Potwierdza się wniosek, że nie ma wpływu orientacja układu współrzędnych.

## 5. Podsumowanie

Wykonane analizy dotyczące szacowania niepewności pomiaru promienia okręgu wykazały, że na wartość niepewności wpływ ma położenie punktów próbkowania względem zera układu współrzędnych. W analizowanym okręgu leżącym w płaszczyźnie  $xy$  istotny wpływ na niepewność ma jedynie zmiana położenia wzdłuż osi  $x$ , przesuwanie punktów próbkowania wzdłuż osi  $y$  i  $z$  nie wpływa na zmianę niepewności pomiaru.

Obliczenia dotyczące wpływu obracania punktów mierzonych zarówno względem jednej z osi układu współrzędnych (w analizowanym przykładzie względem osi  $z$ ), jak i obrotu względem wszystkich osi jednocześnie nie mają wpływu na wartość niepewności.

**LITERATURA**

1. ISO 14978:2018 Geometrical product specifications (GPS) — General concepts and requirements for GPS measuring equipment.
2. ISO/TS 15530-1:2013 Technique for determining the uncertainty of measurement. Part 1: Overview and metrological characteristics.
3. ISO 15530-3:2011 Technique for determining the uncertainty of measurement. Part 3: Use of calibrated workpieces or measurement standards.
4. JCGM 104:2009 Evaluation of measurement data. An introduction to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents.
5. VDI/VDE 2617: 2011 Accuracy of coordinate measuring machines. Characteristics and their checking. Determination of the uncertainty of measurement for coordinate measuring machines using uncertainty budgets.
6. HÄRTIG F., KRYSTEK M.: Correct treatment of systematic errors in the evaluation of measurement uncertainty (2009).
7. MUTILBA U., SANDÁ A., VEGA I., GOMEZ-ACEDO E., BENGOETXEA I., YAGÜE FABRA J.A.: Traceability of on-machine tool measurement: Uncertainty budget assessment on shop floor conditions, *Measurement*. 135(2019), 180–188.
8. PŁOWUCHA W.: Szacowanie niepewności pomiarów współrzędnościowych metodą analizy wrażliwości – podstawy teoretyczne. *Mechanik* 11(2018), 953-956.
9. PŁOWUCHA W.: Point-straight line distance as model for uncertainty evaluation of coordinate measurement, *Measurement*. 135 (2019) 83–95.
10. PŁOWUCHA W.: Wyznaczanie niepewności pomiarów współrzędnościowych metodą analizy wrażliwości. Wydawnictwo Naukowe Akademii Techniczno-Humanistycznej (2019).